3P

同济大学一九九八年硕士生入学考试试题

考试科目：复变函数　　　　编号：26

答题要求：论据充分，论述清楚，计算正确．

一．简答题．　　　　（每小题6分）

1. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z^2+i} dz =$

2. 函数 $\frac{\ln z}{z^2-1}$ 有怎样的奇性？（找出奇点并指出奇点的类别）

3. $\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\sin z}, 0\right) =$

4. $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ 在 $1<|z|<3$ 内的罗朗展式是

5. 若重根以重数计为根的个数，那么在 $|z|<1$ 内方程 $z^n+4z^2=e^z$ 有几个根？

二．计算广义积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$　（12分）

三．设 D 是复平面上割去弧段 $z=e^{i\theta}$ $(0<\theta<\pi)$ 的区域．求一保形映射 T，使得 T: D → G（单位圆域）（12分）

四．设 $f(z)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上解析，若有一列 $z_n \in \bar{D}$，使得 $f(z_n)=a$ $(n=1,2,\cdots)$ 证明 $f(z)\equiv a$．（12分）

五．若二元实函数 $u(x,y)$ 是平面上的调和函数，且 $u(x,y)\le M$，$\forall (x,y)$．证明 $u(x,y)$ 恒为常数．（12分）

六．设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|f(z)|\le 1$．证明对 $\forall n\in N$，$|f^{(n)}(0)|\le n!$　　（12分）

七．设 $\varphi(z)$ 是 Γ 上的连续函数（Γ 是光滑或分段光滑的有限长曲线），对 $z\notin\Gamma$，定义函数

$$f(z)=\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

证明 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 上的解析函数并且

$$f'(z)=\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma．（10分）$$