

同济大学一九九八年硕士生入学考试试题

考试科目: 常微分方程

编号: 28

答题要求:

一. 求解下列各题 (每题8分, 共56分)

1. $xy^2y' = x^4 + y^3$.

2. $xy' - y = x\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. $(5xy - 3y^2)dx + (3x^2 - 7xy^2)dy = 0$.

4. $y(3-4y)^2y'^2 = 4(1-y)$, 求通解及奇解.

5. $16x^2 + 2yy'^2 - xy'^3 = 0$, $y|_{x=1} = -1$.

6. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

7. $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2$, $x=1$ 时 $y=1$, $y'=2$.

二. (10分) 求下列方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 2y + 2z \end{cases}$$

三. (10分) 求下列方程组的通解 (其中 $D = \frac{d}{dx}$)

$$\begin{cases} (D^2 + D + 1)x + (D^2 + 1)y = e^x \\ (D^2 + D)x + D^2y = e^{-x} \end{cases}$$

四. (12分) 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解, 其中 $p(x), q(x)$ 连续, 记 $W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$,

证明 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$

五. (12分) 设连续可微函数 $\varphi(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi'(x) + \varphi(x)] = 0$,

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.