同济大学一九九八年硕士生入学考试试题

考试科目：数学物理方法　　　　编号：33

答题要求：

一、（18分）

(1) 计算 $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)^2}dz$ 和 $\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2-1)^2}dz$；

(2) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x-a}dx$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x-a}dx$，

并进而证明 $\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$（$a, \omega$ 为实常数，且 $\omega>0$）。

二、（14分）

已知 $f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+\alpha)+\delta(t-\alpha)+\delta(t+\beta)+\delta(t-\beta)]$

（α, β 为实常数，且 $\alpha>0$，$\beta<0$），

求其傅里叶变换和拉普拉斯变换。

三、（18分）

求解如下三维波动方程的定解问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u(x,y,z,t) & (x,y,z \in [0,1]) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0 \quad u|_{z=0} = u|_{z=1} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin \pi x \sin 2\pi y \sin 3\pi z \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

四、（18分）

单位半径的均匀球，球面保持零度，初始温度分布为 $f(r)g(\theta)$，求球内各点温度变化情况；若 $f(r)=\frac{\sin \alpha\pi r}{r}$（$\alpha$ 为实常数），$g(\theta)=1$，再计算具体结果。

五、（16分）

用积分变换法求解如下半平面上的稳态分布问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y) = 0 & (x \in (-\infty,\infty),\ y \in [0,\infty)) \\ u|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

六、（16分）

用格林函数法求如下非齐次亥姆霍兹方程的定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k^2 u(x,y,z) = f(x,y,z) & (x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0 \\ u|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=c} = 0 \end{cases}$$

的积分解。