同济大学一九九八年硕士生入学考试试题

考试科目：数学分析　　　　编号：24

答题要求：卷面整洁，字迹清楚

一．求极限（14分）

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^2-1)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1+x^3}} - \cos x\right)$

二．（10分）证明不等式 $xy \le e^x + y\ln\frac{y}{e}$　$(x\in R,\ y>0)$

三．（12分）设 $f(x) = u(x)^{\int_x^{x^2} v(t)\,dt}$，其中 $u(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值可导函数，$v(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $f'(x)$，并由此证明 $\frac{1}{x}\int_x^{x^2} v(t)\,dt = v(x) - 2x\,v(x^2)$ 在 $(0,1)$ 内有解

四．（12分）设 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & |x|\le 2 \\ 0, & 2<|x|\le\pi \end{cases}$，试将 $f(x)$ 展成 Fourier 级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ 的和

五．（14分）计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$，其中 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 Σ 上外法向量的方向余弦

六．（14分）设数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛于 S，试证 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\frac{x^n}{n!}\right)dx = S$，并由此计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx$ 之值

七．（14分）设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域内有定义并且有界，对充分小的 h，$M(h)$ 与 $m(h)$ 分别表示 $f(x)$ 在 $[a-h, a+h]$ 上的上、下确界，又设 $\{h_n\}$ 是一趋于 0 的递减数列，证明：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} M(h_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} m(h_n)$ 都存在

2. $\lim\limits_{h\to 0^+} M(h) = \lim\limits_{n\to\infty} M(h_n)$，$\lim\limits_{h\to 0^+} m(h) = \lim\limits_{n\to\infty} m(h_n)$

3. $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} M(h_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(h_n)$

八．（10分）设有数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k$，证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(S_n - \sigma_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛