同济大学一九九八年硕士生入学考试试题

考试科目： 近世代数　　　　**编号：** 027

答题要求： 在十五个小题中任选十题，不必抄题，但要标明题号.

一. 证明:

1. 设N是G的一个指标为2的子群，那么N一定是G的一个正规子群;
2. 设N和H是G的两个正规子群，那么N和H的交集$N \cap H$仍是G的一个正规子群;
3. 设N和H是G的两个正规子群，那么N和H的乘积NH仍是G的一个正规子群.

二. 证明:

1. $N=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$是置换群$S_4$的一个含于$A_4$内的正规子群;
2. $S_4/N \cong S_3$;
3. 设A_4是交错群，Z_3是模3剩余类域的加法群，那么$A_4/N \cong Z_3$.

三. 设u有右逆，证明以下条件等价:

1. u有多于一个右逆;
2. u不是可逆元;
3. u是左零因子.

四. 设R是一个交换环，证明:

1. P是素理想当且仅当R/P是整环;

(2)，(5)，(9)中哪些是素理想

五. 设G是一个有限群，证明:

1. 阶大于2的元素的个数一定是偶数;
2. 如果G是一个偶数阶群，那么G中阶等于2的元素个数一定是奇数;
3. 如果G是一个$2n$阶的交换群，n为奇数，那么G恰有一个2阶元素;
4. 如果G是一个奇数阶群，那么对任意的$g \in G$，存在唯一的$x \in G$，使$g = x^2$.

4 0