同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目：概率统计　　编号：136-1

2

答题要求：

一）(15分)

设每天进入图书馆人数n服从泊松分布$P(\lambda)$ $(\lambda>0)$
而进入图书馆的人借书概率为p. $(0<p<1)$. 且假设各人是否借书是相互独立的.
i) 求进入图书馆的人中恰好有k个人借书的概率.
ii) 若某天借书人数为k, 试求当天进入图书馆人数为n的概率.

二）(15分).
设随机变量X的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ $(-\infty<x<\infty)$
i) 求X的数学期望$E(X)$和方差$D(X)$.
ii) 求X和$|X|$的协方差, 并问X和$|X|$是否不相关.
iii) 问X和$|X|$是否相互独立? 说明理由.

三）(15分)
某箱装有100件零件. 其中一、二、三等品分别为80, 10, 10件.
从中随机抽取一件. 记 $X_i=\begin{cases}1 & \text{抽到}i\text{等品}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $(i=1,2,3)$.
试求 i) 随机变量X_1和X_2的联合概率分布.
ii) 随机变量X_1和X_2的相关系数ρ.

四）(15分)
设随机变量X_1和X_2独立且有相同分布密度 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$
求 i) $Y_1=X_1+X_2$, $Y_2=X_1/X_2$ 的联合分布密度
ii) 试问Y_1和Y_2是否独立. (需说明理由).

五）(8分)
叙述随机变量序列X_i按概率收敛到随机变量X.
按分布收敛到随机变量X. 按概率为1收敛到随机变量X
的定义. 并指出它们之间的关系.

六）(8分)
利用特征函数证明
若 $\{X_n\}$是独立随机变量序列且服从相同分布.
$E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2>0$
则 $Z_n=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right)/\sqrt{n}\,\sigma$ 按分布收敛到$N(0,1)$.

同济大学一九九九 年硕士生入学考试试题

编号：136-2

考试科目：概率统计

答题要求：

(10分)

七) 设总体X的分布密度为 $f_\theta(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x\geq\theta \\ 0 & 其他 \end{cases}$ θ未知 $-\infty<\theta<\infty$

$(X_1,\cdots X_n)$是取自该总体的简单样本.

i) 求θ的极大似然估计 $\hat\theta$.

ii) 写出$\hat\theta$的分布密度.

(7分)

八) 设 $(X_1,\cdots X_m)$, $(Y_1,\cdots Y_n)$ 分别取自于独立的正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$. ($\sigma^2>0$未知). 通过论证给出 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

(7分)

九) 在一元线性回归中 $y_i=\beta_0+x_i\beta_1+\varepsilon_i$ ε_i独立且服从 $N(0,\sigma^2)$ $(i=1,\cdots n)$

记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$. $l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$.

$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$. 则 β_1的最小二乘估计为 $\hat\beta_1=l_{xy}/l_{xx}$

证明: $\hat\beta_1\sim N(\beta_1,\frac{1}{l_{xx}}\sigma^2)$