同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目：复变函数　　编号：134

答题要求：答题请写清题号，不必抄试卷之题序，任选八题

一. 设 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$ 是一个幂级数，如它在 $\zeta\in\mathbb{C}$ 处收敛，则此幂级数在 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R=|\zeta|\}$ 内闭一致收敛为一个解析函数。

二. 试求在 $|z|>2$ 内，$\dfrac{z^2+1}{z^2(z-2)}$ 的罗朗级数。

三. 设 $f(z)$ 在单位圆盘 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ 上的解析函数，而且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$，而且 $|f(z)|<M$ 对 $\forall z\in D$ 成立。证明在 D 上有

$$|f(z)|\le M|z|^k.$$

四. 求 $z^4+8z+10$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<3\}$ 与区域 $\{z\in\mathbb{C}\mid 3<|z|<6\}$ 中的零点个数。

五. 求作从 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|<2\}$ 与 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z+1|<2\}$ 之公共部分到下半平面的保角变换。

六. 证明 $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$，$|a|<1$，$0\le\theta<2\pi$ 是从单位圆盘 D 到 D 的一一解析变换，并求出其逆变换。

七. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x-4)}$$

八. 设幂级数 $f=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在其收敛圆周上只有一个奇点 z_0，而且是一个单极点，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=z_0$$

九. 设 $f:D\to\mathbb{C}$ 是一个区域 D 上的解析函数，如 $f(D)$ 在像平面的一条曲线 $F(u,v)=0$ 内，试用 Cauchy-Riemann 方程证明 f 必是常数。