同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目：数值分析　　　　编号：131—1 2

答题要求：

一.(15分)(1)使用高斯(Gauss)消去法解线代数方程组，一般为什么要采用选主元的技术？

(2)用不选主元的LU直接三角分解法(Dollitele)分解求解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=5 \\ 2x_1-x_2+9x_3-7x_4=3 \\ -3x_1+4x_2-3x_3+19x_4=17 \\ 4x_1-2x_2+6x_3-21x_4=-13 \end{cases}$$

二(15分)给定函数表

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	1
$f'(x_i)$	0	1	

且已知$f(x)$在$[0,2]$上五阶连续可导，要求用插值法求$f(x)$在区间$[0,2]$上满足所给函数表的四次埃尔米特(Hermite)插值多项式$H_4(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，并估计插值余项。

三(10分)已知线代数方程组
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2-2x_3=3 \end{cases}$$

试分别讨论用简单(Jacobi)迭代法和高斯—塞德尔(Gauss—Seidel)迭代法作迭代时的收敛性。

四(15分)(1)用尤拉(Euler)方法解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\dfrac{y}{x} \\ y(1)=1 \end{cases} \quad (1\le x\le 1.2) \quad 取 h=0.1$$

(2)求系数a, b，使计算公式 $y_{n+1}=y_n+h(ay'_n+by'_{n-1})$ 的局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$

五(15分)(1)试导出切比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $\left(\begin{matrix} n=0,1,2,\cdots \\ x\in[-1,1] \end{matrix}\right)$ 的三项递推关系式：
$$\begin{cases} T_0(x)=1,\ T_1(x)=x \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \end{cases} \quad (n=1,2,\cdots)$$

(2)确定高斯(Gauss)型求积公式
$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx w_0f(x_0)+w_1f(x_1)+w_2f(x_2)$$
的求积系数和节点的值，并指出其代数精度。

同济大学一九九九 年硕士生入学考试试题

考试科目：数值分析　　　编号：131-2

答题要求：

六(10分) 已知 $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$，求其在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式 $P_2^*(x)$。

七(10分) 试说明对于非线性方程 $f(x)=0$，若 $f(x)$ 在其零点 x^* 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f'(x^*)\neq 0$，则求解方程的牛顿(Newton)迭代法在根 x^* 附近是平方收敛的。

八(10分) 设三阶方阵 A 的约当(Jordan)阵 J 具有形式：

$$J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

且满足 $|\lambda_1|>|\lambda_2|$，

对任意向量 $x\neq 0$，作 $\begin{cases} x_0=x \\ x_k=Ax_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots)\end{cases}$

证明：$$\frac{(x_{k+1})_i}{(x_k)_i}\xrightarrow[(k\to\infty)]{}\lambda_1$$