同济大学一九九九年硕士生入学考试试题

考试科目： 数学分析　　　**编号：** 133

答题要求： 论点正确，论据充分，演绎无误，简明扼要。

分值：一.(18分)；二(14分)；三(14分)；四(10分)；五(14分)；六(10分)；七(10分)；八(10分).

一. 计算

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^2\ln(1+x)\arcsin x}$.

2. 设 f，g 分别为可微的三元和二元函数，方程 $\begin{cases} u=f(u,x,v+y) \\ v=g(u-x,v^2 y)\end{cases}$ 确定了函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3. 设 $f(x)=x^x+\int_x^{x^2}e^{-xt^2}dt$，求 $f'(1)$

二. 设 n 为自然数，试讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x>1 \\ \ln 2-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}x^k, & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}, & x<0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的连续性.

并指出间断点的类型(要说明理由)

三. 设常数 $K>1$，(1) 证明方程 $Ky+\sin y+x\cos y=0$ 在区域 $|x|<K-1$，$|y|<+\infty$ 内确定唯一的可导函数 $y=y(x)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x}$

四. 求原点 $(0,0)$ 到抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 交线的最长与最短距离.

五. (1) 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad(x>0)$；

(2) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，其中 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(n+1)$.

六. 设 $\alpha\in R$，$k\in R^+$，求 $J=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-kx}dx$.

七. 试确定指数 $\mu\in R$，使积分 $\int_{(0,1)}^{(x,y)}\dfrac{x}{y}r^{\mu}dx-\dfrac{x^2}{y^2}r^{\mu}dy$ 在区域 $y>0$ 内与路径无关，并求该积分. (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).

八. 设 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0<z\le 1)$ 的下侧，求积分

$$\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+(z^2-2z)\,dx\,dy.$$