同济大学2000年硕士生入学考试试题

考试科目：复变函数　　编号：105

答题要求：计算正确，证明论据清楚

一、计算下面积分（20分）

1. $\oint_{|z|=5} \bar{z}\,dz$

2. $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{7}{2}} \left(\sin \pi z + \frac{z}{\sin \pi z}\right) dz$

3. $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{1+x^2}$

二、（15分）

1. 将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $1<|z|<2$ 内展为罗朗级数

2. 指出 $f(z)=4^{\frac{1}{z-1}}$ 的本性奇点，并在该奇点邻域内将 $f(z)$ 展为罗朗级数

三、（15分）

1. 叙述（不必证明）希瓦尔兹（Schwarz）引理。

2. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$|f(z)|<1$，$f(0)=f'(0)=0$，求证：

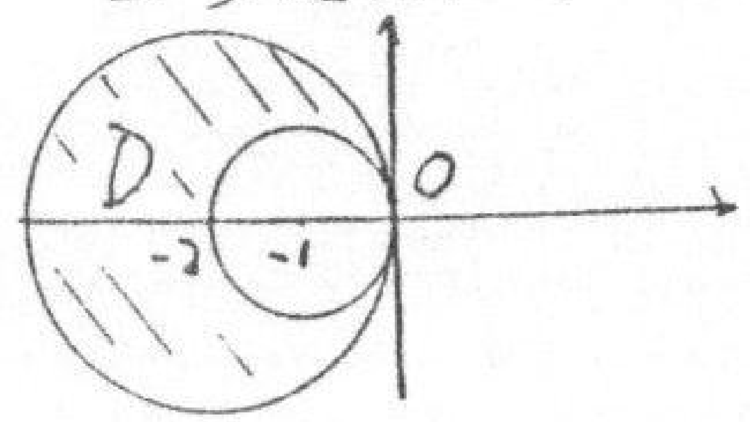
$$|f(z)| \le |z|^2,$$

当且仅当 $f(z)=e^{i\alpha}z^2$ 时成立，α 为任意实常数。

四（10分）设 $p(z)$ 是一个 n 次多项式（最高项系数不等于0），当 $|z|\ge R>0$ 时 $p(z)\ne 0$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = n.$$

五、（15分）将月形区域 $D:(|z+1|>1)\wedge(|z+2|<2)$ 保形映照到上半平面。



六（15分）设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$f(0)=0$，$|f(z)|<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ 在 $|z|<1$ 内内闭一致收敛。

七、（5分）在第六题中，如果去掉条件 $|f(z)|<1$，则结论也成立。

八、（5分）将

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad |z|<1$$

进行解析开拓。