7.3　　183 10

同济大学2000年硕士生入学考试试题

考试科目：近世代数　　编号：106

答题要求：不必抄题，但要标明题号.

一．(24') 设S_4是4个数字的集合$\{1,2,3,4\}$的对称群，

1. 找出所有与S_3同构的子群；
2. 写出S_4的全部共轭类；
3. 找出S_4的全部正规子群.

二．(16') 设$G=GL(2,R)$是实数域R上行列式不等于0的全体2阶矩阵所成的集合，证明

1. G关于矩阵乘法成群；
2. $x=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$的阶为4，$y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$的阶为3，但$xy$是无穷阶元素.

三．(24') 设A,B是群G的子群，H是G的唯一的阶为n的子群，证明：

1. H是G的正规子群；
2. AB是G的一个子群当且仅当$AB=BA$；
3. 若C是G的一个子群，且$A\subseteq C\subseteq AB$，则有$C=AB\cap C=A(B\cap C)$.

四．(12') 设R是一个有单位元的交换环，I是R的一个理想．证明商环R/I是域当且仅当I是R的极大理想.

五．(24') 设R是至少有两个元素的环，$\forall\ 0\neq a\in R$，存在唯一的$b\in R$，使$aba=a$．证明：

1. R没有零因子；
2. $bab=b$；
3. R有单位元；
4. R为除环.