

同济大学 2000 年 硕 士 生 入 学 考 试 试 题

考试科目: 数值分析

编号: 107

答题要求: 解题要有过程

一. (15分) (1) 用高斯(Gauss)消去法解线性代数方程组, 一般为什么要采用选主元素的技术?

(2) 用不选主元的直接三角分解法(Doolittle分解), 求解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

二. (15分) 求函数 $f(x) = e^{2x}$ 在区间 $[1, 3]$ 上对于 $\pi = \text{Span}\{1, x\}$, 带权 $\rho(x) = 1$ 的最佳平方逼近多项式。

三. (15分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有连续的三阶导数, 取 $x_0, x_1 \in [a, b]$, 试用牛顿-埃尔米特(Newton-Hermite)插值法构造不超过二次的多项式 $H(x)$, 满足条件:

$$H(x_0) = f(x_0), H(x_1) = f(x_1), H'(x_1) = f'(x_1)$$

并估计余项 $R(x) = f(x) - H(x)$ 。

四. (15分) 写出解线性代数方程组:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

的高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法的迭代格式, 并判断其收敛性。

五. (10分) 作适当变换, 把积分 $I = \int_0^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x(2-x)}} dx$ 化为能应用 n 个节点的高斯-切比雪夫(Gauss-Chebyshev)求积公式的积分。问当 n 取何值时, 能得到积分的精确值? 并计算它。

六. (15分) 设线性代数方程组 $Ax = b$ 有唯一解, 当 $b \neq 0$, 且有扰动 δb 时, 假定计算过程没有引入其它误差, 由 δb 引起解的扰动为 δx 。

(1) 证明: 解的相对误差有估计式: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ 。

(2) 若 $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $b = (-8.5, 5)^T$, $\delta b = (0.02, -0.03)^T$ 试估计解的相对误差。(用 $\|\cdot\|_\infty$)

七. (15分) 证明: 解常微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(a) = s \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$

的计算格式: $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}(4y'_{n+1} - y'_n + 3y'_{n-1})$ 是二阶的, 并给出其局部截断误差的首项。