7.3　　181

2000 年硕士研究生入学考试《数学分析》试卷　　编号：104

一、计算（20 分）

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

（2）设变换方程$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$可把$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a$的值.

（3）$\int_0^{+\infty}\min\left(e^{-\sqrt{x}},\frac{1}{2}\right)dx$.

二、（10 分）将函数$f(x)=\begin{cases}x+\frac{\pi}{2} & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$展成正弦级数，并指出该正弦级数的和函数.

三、（10 分）求在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c\in R^+)$内嵌入的有最大体积的各棱平行于坐标轴的直角平行六面体的体积.

四、（10 分）证明曲线积分$\int_L\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$在右半平面内与积分路径无关，并当$L$的起点为$(1,\pi)$，终点为$(2,\pi)$时计算此积分.

五、（10 分）求积分$\iint_\Sigma 4zxdydz-2yzdzdx+(1-z^2)dxdy$，其中$\Sigma$为$yoz$面上的曲线$z=e^y\ (0\le y\le a)$绕$z$轴旋转所得的曲面的下侧.

六、（15 分）设函数$f(x,y)$在R^2上有连续的偏导数，问函数$g(x)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(\int_x^{\sin x}f(x,y)dy\right) & x\le 0\\ \frac{d}{dx}\left(\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right) & x>0\end{cases}$在哪些点处连续？若有间断点，请指出其类型并说明理由.

七、（15 分）设$f(x)$为$[0,+\infty)$上恒取正值的连续函数，且当$x\ge 2$时$f(x)\ge\frac{1}{x^2}$，．令$\varphi(x)=\frac{\int_0^{+\infty}tf(t)dt}{\int_0^{+\infty}f(t)dt}\ (x>0)$，证明对任意$c\in(0,+\infty)$，方程$\varphi(x)=c$在$(0,+\infty)$上有唯一解.

八、（10 分）设函数$f(x)$在区间$[x,x+h]$上连续且二次可微，证明存在$\theta\in(0,1)$，使得$f(x+h)+f(x)=2f\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^2}{4}f''(x+\theta h)$.