7.3

178 179

同济大学 2000 年硕士生入学考试试题

考试科目： 高等数学（单考）　　**编号：** 102

答题要求：

（注：本试卷中记正切函数为 $\tan x$，余切函数为 $\cot x$）.

一、求下列极限(8 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$.

二、计算导数或偏导数(16 分)

(1) 设 $y=e^{\tan x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，求 y'.　　(2) 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(4) 设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三、计算积分(16 分)

(1) 求 $\int x\sin^2x\,dx$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^x}, & 当x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & 当x\ge 0,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)\,dx$.

(3) 求 $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$，其中 D 是由双曲面 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=1$ 所围区域.

(4) 求 $\iint\limits_\Sigma(x+y+z)\,dS$，其中曲面 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上 $z\le 2$ 的部分.

四(12 分)、设有曲线 C：$y=e^{-x}(x\ge 0)$，

(1)把曲线 C、x 轴、y 轴和直线 $x=t(t>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，求此旋转体体积 $V(t)$；

(2)若常数 a 满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to+\infty}V(t)$，求 a 的值；

(3)在此曲线上找一点 M，使过点 M 的切线与两坐标轴所夹平面图形的面积最大，并求出该面积.

五(10 分)、设曲线积分 $\int_C xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,dx+y\varphi(x)\,dy.$$

六(10 分)、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛区间，并求其和函数.

七(10 分)、解微分方程

(1)求 $\begin{cases}x\ln x\,dy+(y-\ln x)\,dx=0\\ y|_{x=e}=1\end{cases}$ 的特解.

(2)求 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

八(10 分)、已知点 $A(-1,2,0)$ 及点 $B(0,3,1)$，试在直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 上求一点 C，使 ΔABC 的面积最小，并求出此最小面积.

九(8 分)、若函数 $f(x)$ 当 $x\ge 0$ 时可导，且有 $0<f'(x)\le M<1$（M 为某一常数），又 $f(0)>0$，求证：在 $(0,+\infty)$ 内，方程 $f(x)=x$ 有且仅有一个实根.