7.3

180 180

同济大学2000年硕士生入学考试试题

考试科目：高等代数　　　　编号：103

答题要求：

一. 是非题,正确的在(　)内打✓，错误的打×.(6分)

1.设T是实数域上n维线性空间V上的线性变换,则在V上不一定存在T的特征向量。(　)

2.设V是n级实矩阵全体，对V中任意矩阵A，定义T(A)=$A'+A^2$。则T是V上线性变换。(　)

3.任意一个实方阵必相似于一个实上三角阵。(　)

二. 填充：(12分)

1. 设A是5阶方阵，|A|=1.则|2A|=______

2.设A=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$),B=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$)都是4阶方阵，|A|=2, |B|=1.则 $|2(A+B)|=$______

3. 设 $\alpha=(1,2,3,2), A=\alpha'\alpha$，其中$\alpha'$是$\alpha$的转置。则|A|=______，秩A=______

4. 设 $A^2=2A$. 则 $(E-A)^{-1}=$______，其中E是与A同级的单位方阵.

5. 设 $A\alpha=3\alpha$, 其中α是非零列向量，$f(x)=x^2-2x+4$. 则 $f(A)\alpha=$____α

6. 设 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$. 则当____$>t>$____时$f$正定.

三.（1）设 $\begin{vmatrix}2&2&-1&3\\4&x^2-5&-2&6\\-3&2&-1&x^2+1\\3&-2&1&-2\end{vmatrix}=0$ 求x.（6分）

（2）设 $D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$，求$D$.（8分）

四. 设 $A=\begin{pmatrix}0&C\\B&0\end{pmatrix}$，$XA=D$,

其中 $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\-1&1&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-2&1&1\end{pmatrix}$. 求$X$.（10分）

五. 六. 问k取何值时，下方程组AX=β (1)有唯一解;(2)无解;(3)有无穷多组解,这时求它的通解，其中 A=$\begin{pmatrix}1&k&1\\1&-1&1\\k&1&2\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (10分)

七. 判别下列命题是否正确，正确的证明之，错误的举例说明.（10分）

1. 如果α_1,α_3线性无关，α_2,α_3线性无关，则α_1,α_2也线性无关.
2. 如果A,B可逆，则$A+B$也可逆.

八. 设3阶方阵A特征值是$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 对应的特征向量是$\alpha_1=(1,1,1)',\alpha_2=(1,2,4)',\alpha_3=(1,3,9)'$。又设$\beta=(1,1,3)'$。

（1）将β用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；（2）求$A^5\beta$.（8分）

九. 设V是2阶实方阵全体所构成的线性空间. 任意A∈V有$T(A)=2A'-A$其中A'表示A的转置. 证明T是V的线性变换，并求T在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$下的矩阵表示。(10分)

十.求正交变换化二次型 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型.(10分)

十一. 若$A^2-4A=5E$，其中E是n阶单位方阵，A是n阶方阵.证明$R(A-5E)+R(A+E)=n$. (10分)