183 185—A

同济大学2000年硕士生入学考试试题

考试科目：概率统计　　编号：108—1 2

答题要求：写出演标或证明过程

（共六大题）

一.（10分）设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，今做X次独立试验，观察某事件A发生次数（记为Y），而A在每次试验发生的概率为p，求证：Y服从参数为λp的泊松分布.

二.（15分）编号为$1-n$的n个球，随机地落入编号$1-n$的n个盒子，假设每盒必落入且只落入一球；ξ为球与盒同号的号码个数，求$E\xi$、$D(\xi)$.

三.（15分）设X_1, X_2相互独立，都服从$N(0,1)$分布，记

$Y_1 = Max(X_1, X_2)$，$Y_2 = min(X_1, X_2)$，$Z = Y_1 + Y_2$，$U = X_1^2 + X_2^2$，

$V = X_1/X_2$，

求　1. Z的密度函数；

　　2. EY_1，EY_2，EU，EV.

同济大学 2000 年 硕士生入学考试试题

编号： 108-2

考试科目：概率统计

答题要求：

四.(20分) 设 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y, & 当 x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求：
1. 常数 c 的值；
2. Y 的边际密度函数 $f_Y(y)$；
3. $P(Y\leq \frac{1}{2}\sqrt{1-X^2})$；
4. 给定 $Y=y$ 时，X 的条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

五.(25分) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(a,\sigma^2)$ 的简单随机样本，a 已知，今有 σ^2 的如下三个估计：

$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\hat{\theta}_2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\hat{\theta}_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$

求证：
1. $\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_3$ 为 σ^2 的无偏估计，$\hat{\theta}_2$ 是有偏的；
2. $E(\hat{\theta}_2-\sigma^2)^2 < E(\hat{\theta}_1-\sigma^2)^2$；
3. $D(\hat{\theta}_3) < D(\hat{\theta}_1)$.

又你从 1, 2, 小题能得出什么结论？

六(15分) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $(0,\theta)$ 上均匀分布的简单随机样本，$\theta>0$ 未知，统计量 $T=\max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$. 对给定 $\theta_0>0$，$\alpha\in(0,1)$，

求证：对于原假设 $H_0:\theta\leq\theta_0$，拒绝域 $C=\{T\geq\sqrt[n]{1-\alpha}\cdot\theta_0\}$ 所代表的检验是水平 α 检验.