同济大学 2000 年 硕士生入学考试试题

考试科目：概率论与数理统计　　编号：58-1
2

答题要求：

1) 在一次试验中事件A发生概率为p. 现进行n次独立试验，则A至少发生一次概率为 ________，事件A至多发生一次的概率为 ________　（5分）

2) 随机变量X的密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则X的数学期望为 ________，X的方差为 ________.（5分）

3) 随机变量X的密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ 则X的分布函数为

________　（5分）

4) 在(0.1)中随机地取2个数. 则事件"两数之和 $<\frac{6}{5}$"发生的概率为 ________　（5分）.

5) 已知随机变量(X.Y)服从 $D=\{(x.y)\mid 0<x<1,\ |y|<x\}$ 上均匀分布，求关于X的边缘密度及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差.（10分）
并求当 $X=\frac{1}{2}$ 时Y的条件密度.

6) 已知随机变量X的数学期望为μ. 方差为 σ^2.
证明 对任一 $\varepsilon>0$. 有 $P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　（10分）

7) 为测量A.B两地距离，现分成1200段分段测量. 每段测量误差服从 $[-0.5, 0.5]$（cm）上的均匀分布. 求总距离误差绝对值不超过20cm的概率.（用中心极限定理 $\Phi(3)=0.9987$ $\Phi(2)=0.9772$）（10分）.

8) 已知X.Y服从 $B(1.p)$ 且相互独立.
设 $Z=\begin{cases}1 & X+Y \text{ 奇数}\\ 0 & X+Y \text{ 偶数}\end{cases}$
求(X.Z)的联合概率分布 且求 $cov(X.Z)$.　（10分）

9) 已知 $X_1,\cdots X_n, X_{n+1}$ 独立且服从相同的正态分布 $N(\mu.\sigma^2)$
记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.
证明：$\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1)$ 分布　（10分）.

10) 已知 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自于 $N(0.\sigma^2)$ 的总体的简单样本. $\sigma^2>0$ 未知.
i) 求 σ^2 的极大似然估计 $\hat{\sigma}^2$.
ii) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ $(\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)$ 都是 σ^2 的无偏估计.
iii) 比较 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}_1^2$ 的方差. 说明哪一个估计更有效.　（15分）

106 106 10 7

同济大学2000 年硕 士生入学考试试题

考试科目：概率论和数理统计　　编号：58-2

答题要求：

(1) 在漂白工艺中为考察温度对织品断裂强度的影响，在70°和80°两种温度下分别重复进行了8次试验，其强度数值经计算得到：在70°下样本均值为20.325，样本方差为1.094，在80°下样本均值为19.400，样本方差为0.829。

i) 在显著水平 $\alpha=0.50$ 下作 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ ($H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$) 检验

ii) 在显著水平 $\alpha=0.10$ 下作 $H_0': \mu_1=\mu_2$ ($H_1': \mu_1\neq\mu_2$) 检验。

说明检验的结果

($F_{0.75}(7,7)=1.70$，$F_{0.75}(8,8)=1.64$

$t_{0.90}(14)=1.3450$，$t_{0.95}(14)=1.7613$，$t_{0.95}(15)=1.7513$)

$t_\alpha(n)=t_{(1-\alpha)}(n)$

[本题中假设断裂强度服从正态分布]　　(15分)

(其中样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$)

1. 解：$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，$\mu_1, \mu_2$ 未知，$\alpha=0.50$

70°C：$\bar{x}=20.325$　$S_1^2=1.094$　$n_1=8$

80°C：$\bar{y}=19.400$　$S_2^2=0.829$　$n_2=8$

$$F=\frac{\max\{S_1^2, S_2^2\}}{\min\{S_1^2, S_2^2\}}\sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$=\cancel{0.829}=\frac{1.094}{0.829}=1.320$$

$k_1=7$、$k_2=7$.

$$F_{\frac{\alpha}{2}}=F_{0.25}(7,7)=\frac{1}{F_{0.75}(7,7)}=0.588$$

$F>F_{\frac{\alpha}{2}}$　接受 H_0

2. 解：$H_0: \mu_1=\mu_2$.　$H_1: \mu_1\neq\mu_2$　σ_1, σ_2 未知　$\alpha=0.1$

70°C：$\bar{x}=20.325$　$S_1^2=1.094$　$n_1=8$

80°C：$\bar{y}=19.400$　$S_2^2=0.829$　$n_2=8$

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\cdot S_W}\sim t(n_1+n_2-2)\qquad S_W=\sqrt{\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$=\frac{20.325-19.4}{\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{\frac{8\times1.094+8\times0.829}{8+8-2}}}=1.766$$

$\cancel{t_{n_1+n_2-2}}$ $t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.05}(14)=t_{0.95}(14)=1.7613$

$\because T>t_{\frac{\alpha}{2}}$　拒绝 H_0