复旦大学

96 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
计算数学
应用数学
运筹学与控制论

考试科目：高等代数

（共 2 页）

1. ① 何謂逆陣？

② 求矩陣

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$ 的逆陣.

2. 設 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 它的特征多项式為

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$$

證明 它的係數

$$b_k=(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\det\begin{pmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{pmatrix}.$$

3. $A\in C^{n\times n}$

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$$

試證明

$$f(A)=A^n+b_1A^{n-1}+\cdots+b_{n-1}A+b_nI\equiv 0$$

4.17

4. 設 L_1, L_2 是两个 n 维线性空间的线性子空间.

① 何謂 L_1, L_2 之和 L_1+L_2, 何謂 L_1, L_2 之交 $L_1 \cap L_2$?

② 令 $\dim(S)$ 表示线性子空间的維數, 証明:

$$\dim(L_1)+\dim(L_2)=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2)$$

5. 設 A 為 $n\times m$ 实矩陣, B 為 $m\times s$ 实矩陣, 令 $\operatorname{rank}(S)$ 为矩陣 S 的秩, 試証:

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-m \le \operatorname{rank}(AB)$$
$$\le \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)).$$

每題 20 分

161