

一. 计算行列式的值 (5分)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

二. 如果 $AB=BA$, 证明 A 与 B 有公共的特征向量 (10分)

三. 设 A 是一个幂零方阵, 证明 $A+E$ 的行列式的值等于 1. (10分)

四. 求解线性方程组

$$\begin{cases} x+y+z = a+b+c \\ ax+by+cz = a^2+b^2+c^2 \\ bcx+cay+abz = 3abc \end{cases}$$

其中 a, b, c 是互不相等的. (5分)

以下是数学分析试题:

五. 下列命题是真的, 请给出严格证明, 否则给出反例, 且作必要说明. (16分)

1. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则在两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中至少有一个为无穷小量.
2. 如果 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则 $f'(0) = 0$.
3. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调减少 (指对任意 $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$), 且可导, 则 $f'(x) < 0$.
4. 如果函数 $f(x)$ 在 $x \in (a, b)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

六. 计算 (17分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\frac{1}{\tan x}}$

2. 求 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

3. 设 $u = f(r, r \cos \theta)$ 有二阶连续偏导数.

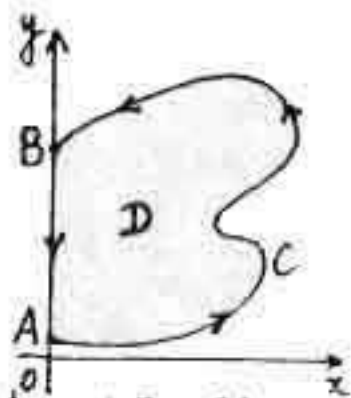
求 $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$.

4. 设 C 为连接点 $A(0, c)$ 和 $B(0, d)$

($c < d$) 的任一光滑曲线, 方向由

A 到 B , 它和线段 AB 所围图形的

面积为 A . 又设 $\varphi(y)$ 是连续可微函数, (见下页)



(接上页)

计算 $\int_C [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy$

七. 证明题 (12分)

1. 如果 $y=f(x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (A 为有限数), 则 $y=f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.
2. 设连续函数 $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, 其值域 $R_f \subseteq [a, b]$, 则一定存在 $x_0 \in [a, b]$, 使 $f(x_0) = x_0$.

八. (25分)

1. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$ 的敛散性.
2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)4^n}$ 的绝对收敛, 条件收敛和发散.
3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 的绝对收敛, 条件收敛和发散.
4. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}$
求 (1) f 的连续范围.
(2) f 的可导范围.
(要求说明理由)