

复旦大学

2006 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
计算数学
应用数学
运筹学与控制论

考试科目：

数学分析

(共 2 页)

1. 计算题

(1) 设 $x = 2t - t^3$, $y = 3t - t^3$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 设 $y = \sin^2 x$, 求 $\frac{d^3y}{dx^3}$.

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.

(4) 求 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

(5) 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

(6) 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq \pi} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(本题共 6 小题, 每小题 8 分)

2. 求圆锥高为 1 的圆锥的最大体积 (专题 14 分).

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \\ -\pi - x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(1) 求 f 的 Fourier 展开式;

(2) 讨论 f 的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 上是否收敛于 f , 是否一致收敛. (专题 14 分).

4. 设 f 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

(专题 14 分).

5. 设对 $[0, 2]$ 中一切 x , 均有 $|f(x)| \leq 1, |f'(x)| \leq 1$.

证明

$$|f'(x)| \leq 2$$

对一切 $x \in [0, 2]$ 成立. (专题 10 分).