

复 旦 大 学

1997 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
计算数学
应用数学
运筹学与控制论

考试科目：高等代数

(共 2 页)

I. 下列 5 个向量是否线性相关？为什么？

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(20 分)

II. 证明

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 51 & -50 \\ 50 & -49 \end{pmatrix}$$

(20 分)

III. $A = (a_{ij})$ 是复数域上的 $n \times n$ 矩阵
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 是 n 维向量
 考虑 n 个未知量的方程组

$$Ax = b \quad \text{若 } \det(A) \neq 0$$

試證明 克拉梅 (Cramér) 法則.

即: $x_j = \frac{A_j}{\det(A)}$, 这里 A_j 是 A 中第 j 列用

b 代替后所得行列式值. $\det(A)$ 是 A 的行列式.
 x_j 是方程第 j 个分量. 且解是唯一的. (20分)

IV.

若 V 是线性空间, V_1, V_2 是 V 中两个
 非平凡子空间, 证明 V 中存在元素
 x , 使得 $x \in V_1, x \in V_2$. (20分)

V. 多项式 $f(x), g(x)$ 是互质的, 证明
 存在二个多项式 $a(x), b(x)$, 使得

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1. \quad (20分)$$