复 旦 大 学

1998年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
计算数学
应用数学
运筹学与控制论

考试科目：高等代数

（共 4 页）

1. α,β 是复数，$u,v\in\mathbb{C}^{n\times 1}$，$u\neq 0$，$v\neq 0$。証明：$(I-\alpha uv^H)^{-1}=I-\beta uv^H$，$\alpha=0$ 时必 $\beta=0$，$\alpha\neq 0$ 时必 $\beta\neq 0$ 且 $\alpha^{-1}+\beta^{-1}=v^Hu$。（15分）

2. $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&\omega&c\\0&0&\omega^2\end{pmatrix}$，$a,b,c$ 为实数，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$。求 A^{100}。

（10分）

3、n个实变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次型为$2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$，

它是否正定？說明理由.

(15分)

4、求

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

的Jordan标准形和全体特征子空间.

(20分)

5. 实阵 H 是初等反射阵，即 $H=I-2uu^T$，$u\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，$u^Tu=1$，当且仅当 H 正交相似于 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. 証明之.

(20分)

6. f, g 是互質的實多項式. $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$E=f(M)$，$F=g(M)$.

(i) 証明：$N(EF)=N(E)\oplus N(F)$.

(ii) 由(i)証：若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $A^3=A$，則有非奇异阵 $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$，使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \boxed{I_s} & & \\ & \boxed{-I_{r-s}} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix},\quad r=r(A).$$

(20分)

記号：

$\mathbb{R}^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 实阵全体. $\mathbb{C}^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 复阵全体. A^T, A^H 分别是阵A的转置和转置复共轭. $N(A)$ 是阵A的零空间，即齐次方程组 $Ax=0$ 的解空间. 方阵A的特征子空间是 $N(A-\lambda I)$，其中 λ 是A的某个特征值. I 是单位阵. $W_1\oplus W_2$ 是子空间 W_1, W_2 的直接和. $r(A)$ 是阵A的秩.