73

复 旦 大 学

1998 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：统计学 数量经济学　　　　考试科目：概率统计

（共 4 页）

一、工厂生产的某零件重量 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$，已知每个零件的销售利润 T 与零件重量之间的关系如下：

$$T=\begin{cases} -1 & X<10 \\ 20 & 10\le X\le 12 \\ -5 & 12<X \end{cases}$$

问：零件平均重量 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大。（15分）

二、设随机变量 (ξ, η) 的分布密度为 $\varphi(x, y)$。

1). 求随机变量 $\zeta=\xi\cdot\eta$ 的分布密度，

ii) 设 ξ 与 η 独立，并且分别具有分布密度

$$\varphi_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$\varphi_\eta(y)=\begin{cases} y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}} & y\geq 0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$$

求 $\zeta=\xi\cdot\eta$ 的分布密度．（15分）

三．设 μ_n 是 n 次贝努里试验中事件A出现的次数，p 是事件A在每次试验中出现的概率，请证明：对任意 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0.$$

（15分）

四：从一付扑克牌（四种花色，每种花色13張，共52張）中一張接一張有放回地抽取，直到四种花色至少出现一次为止。问：抽取6張就达到要求的概率是多少？

（15分）

五. 已知随机变量 $r=\ln(1+R)$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 R 的均值 $E(R)$ 和方差 $Var(R)$。 （20分）

六：设 $y_i=\alpha+\beta x_i+e_i$ 是选择的变量；x_i 是确定性变量 x 的观测值；y_i 是随机变量 y 的观测值；e_i 是随机误差，假定是不相关的，其均值为 0，方差为 σ^2。

试证明：

α和β的估计

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x},$$

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

是最佳线性无偏估计量. （20分）