复 旦 大 学

1998 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：

计算机科学理论
计算机软件
计算机组织与系统结构
计算机应用

考试科目：

数学分析与线性代数

（共 4 页）

一、线性代数（共30分）

1. 计算行列式的值.（6分）

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

2. 讨论λ取什么值时，方程组有解，并求解.（9分）

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

3. 求解矩阵 X.（6分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，证明：如果 $A^2=E$，那么

秩$(A-E)$ + 秩$(A+E) = n$.（9分）

二、数学分析（共70分）

1，严格表达下列概念.（6分）

(1) 写出 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 为一致连续函数.

(2) 写出 β 不是数集 A 的上确界.

2，下列命题如果正确的，请给出严格证明，否则请举出反例，且作必要说明.（16分）

(1) $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 满足如下条件：

(i) f 在 (a,b) 内可微，

(ii) $f(a)=f(b)$，

则至少存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.

(2) 如果函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，

则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+y$.

(3) 如果数列 $\{x_n\}$ 是非无穷大量，则一定存在收敛子列.

(4) 如果函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$ 上可导，且

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$

则 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=\infty$

3，计算.（22分）

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{tg^3 x}$

(2) 已知 $y=\operatorname{tg}\cos x^{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

(3) 已知 $f(x)=(x-a)^{2}\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域内连续，求 $f''(a)$.

(4) 计算曲线积分

$$\int_{C}(x^{2}+xy)dx+(x+y^{2})dy$$

C 是正方形 $|x|\le 1,\ |y|\le 1$ 的边界，逆时钟方向.

(5) 求抛物面 $4z=x^{2}+y^{2}$，柱面 $2x=x^{2}+y^{2}$ 以及 $z=0$ 所围体积.

4, (20分)

(1) 讨论 $\int_{0}^{1}\frac{e^{x}-1}{x^{p}}dx$ 收敛性.

(2) 说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ 收敛性.

(3) 讨论 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p}x\cos^{q}x}$ 收敛性.

(4) 设 $f_{n}(x)=e^{-nx^{2}}\cos x$，$x\in[-1,1]$，说明

(i) $f_{n}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是不一致收敛的.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f_{n}(x)dx=\int_{-1}^{1}\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}(x)dx$.

5. 设 $f(x)$ 定义在 $[0,c]$，$f'(x)$ 存在且单调下降，又 $f(0)=0$，请应用拉格朗日中值定理证明：对于 $0\le a\le b\le a+b\le c$ 恒有 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$。（6分）