1999年复旦大学常微分方程试题

1999年复旦大学常微分方程试题

一. 求微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=e^t$$

的通解．（20分）

二. 设

$$\begin{pmatrix}\phi_1(t)\\ \phi_2(t)\end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}$$

是方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

的两个解，其中 $p_{11}(t),p_{12}(t),p_{21}(t),p_{22}(t)$, 是定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的连续函数．用 $W(t)$ 表示下列行列式：

$$W(t)=\begin{vmatrix}\phi_1(t) & \psi_1(t)\\ \phi_2(t) & \psi_2(t)\end{vmatrix},$$

试证明 Liouville 公式，即证明下列等式

$$W(t)=W(0)\exp(\int_0^t(p_{11}(s)+p_{22}(s))ds)$$

对任何 $t\in\mathbb{R}$ 成立．（20分）

三. 设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且当 $t \in [a,b]$ 时，

$$v(t) \geq 0$$

$$u(t) \leq u_0 + \int_a^t u(s)v(s)ds.$$

试利用逐次逼近法证明不等式

$$u(t) \leq u_0 \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$$

对任何 $t \in [a,b]$ 成立. (20 分)

四. 设 $\phi(t,p)$ 为初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad x(0) = p$$

的解，其中 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的. 假定对任何 $p \in \mathbb{R}^n$，解 $\phi(t,p)$ 关于 t 的存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$

(1). 证明下列等式

$$\phi(t+s,p) = \phi(t,\phi(s,p))$$

对任何 $s,t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ 成立. (5 分)

(2). 讨论解 $\phi(t,p)$ 关于 (t,p) 的连续性. (5 分)

(3). 若对于给定的 $p_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立着

$$\|\phi(k,p_0) - p_0\| \leq 1, \quad (k = 1,2,3,\cdots),$$

证明 $\phi(t,p_0)$ 作为 t 的函数在 $t \in [0,+\infty)$ 上是有界的. (10 分)

五 考虑方程

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = f(t).$$