1999 年复旦大学高等代数试题

1999 年复旦大学高等代数试题

一．概念题（不必写理由或计算过程）：（45分）

1．数域 K 上 n 阶反对称阵组成的 K 上线性空间的维数是（　　　）．

2．欧氏空间中 r 个向量两两正交，它们是否线性无关（答是或否）__________．

3．欧氏空间中两个正交变换之和是否仍是正交变换（答是或否）__________．

4．上三角阵 A 是正交阵，则 A 必是__________阵．

5．欧氏空间上自共轭变换在标准正交基下的表示矩阵为________阵．

6．已知8阶阵 A 的不变因子为 $1,\ldots,1;(\lambda-1)(\lambda^2+1)$，$(\lambda-1)(\lambda^2+1)^2$，写出 A 的Jordan标准型．

7. 设 ϕ 是n维线性空间V上线性变换，V是否必是 $Ker\phi$ 和 $Im\phi$ 的直和？(　　)

8. 已知V是K上小于4次的多项式全体组成的线性空间且 $x^3, x^3+x, x^2+1, x+1$ 是V的一组基，向量 x^2+2x+3 在这组基下的坐标（写成行向量形式）为：

______________.

9. 写出K上4维列向量空间由下面矩阵决定的线性变换 ϕ 的一个2维不变子空间的基：（写在本题空白处）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

又，ϕ 的核空间的维数为________.

10. 求 $2x^4-7x^3+x+1$ 和 x^3-3x^2+1 的最大公因式.

(　　　　　　　　)

11. 设 $\dim V=n$, $\dim U=m$, σ 是 V 到 U 的线性映射，若 $n>m$，则 σ (　　)

A. 必不是单映射；B. 必是满映射；C. 必是单映射；

D. 必不是满映射.

12. 将n阶方阵A的i、j行对换，再将i、j列对换得矩阵B，则A与B(　　　　)

A. 必相似；B. 不相似；C. 无法判断.

13. 设A是n阶实对称矩阵，A的n个顺序主子式都不小于零是A为半正定阵的(　　)

A. 充分条件；B. 必要条件；C. 充要条件；

D. 既非充分又非必要条件.

14. 设 ϕ 是n维线性空间上的线性变换，$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 ϕ 的全部不同特征值，V_i 是 λ_i 的特征子空间 $(i=1, \cdots, s)$，则 $\dim V_1+\cdots+\dim V_s$ (　　) n. （填 $\leqslant$, $\geqslant$ 或 $=$）

二．用初等变换法将下列二次型化为标准型并求出变换阵

$f(x,y,z)=x^2-3y^2-2xy+2xz-6yz$ （10分）

三．设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是整系数多项式，$a_n\neq 0$，$n\geqslant 2$，p是素数．若p可以整除 $a_i\,(i=0,1,\cdots,n-1)$ 但不能整除 a_n 且 p^2 也不能整除 a_0，求证：$f(x)$ 是有理数域上的不可约多项式．(10分)

四．A、B、C是数域K上n阶矩阵且 $r(A)$ 表示A的秩，求证：

$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B)$ （10分）

五．设A、B是n阶正交阵且 $\det A=1$，$\det B=-1$，求证：$A+B$ 必是奇异阵．(10分)

六．设 $g(\lambda)$ 是数域K上线性空间V上线性变换 ϕ 的最小多项式，$g(\lambda)=p(\lambda)q(\lambda)$ 且 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$ 都是K上不可约多项式，求证：存在 ϕ 的不变子空间 V_1、V_2 使V是 V_1 和 V_2 的直和且 ϕ 作为 V_1 上的线性变换其最小多项式等于 $p(\lambda)$，作为 V_2 上的线性变换其最小多项式等于 $q(\lambda)$．(15分)