

1999 年复旦大学数学分析与线性代数试题

考研加油站收集整理 <http://www.kaoyan.com>

1999 年复旦大学数学分析与线性代数试题

一. 线性代数 (30分)

1. 求解方程组. (7分)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

2. 计算  $n$  阶行列式 (8分).

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

3. 下列结论是否为真, 并说明理由. (4分)

- 1) 幂等阵 ( $A^2=A$ ) 的特征值只能是 0 或 1;
- 2) 幂零阵 ( $A^p=0$ ) 的特征值只能是 0;
- 3) 非退化阵 ( $|A| \neq 0$ ) 的特征值均不为 0.

4. 设  $A$  和  $B$  都是  $n$  阶正交矩阵, 且  $|A| = -|B|$

求証:  $|A+B|=0$  (9分)

二 数学分析 (70分)

1. (24分)

1) 严格表达下列概念.

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

(2)  $y=f(x)$  在  $x \in [a, b]$  上不一致连续.

2) 下列命题正确的请给出严格证明, 否则举出反例且作必要说明.

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ , 则两个数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  中至少有一个为无穷小量 (即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ).

(2) 设数列  $\{a_n\}$  为无穷大量, 又数列  $\{b_n\}$  满足:  $|b_n| > 0$ , 当  $n \geq 1$ . 则数列  $\{a_n b_n\}$  为无穷大量.

(3) 设函数  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . 如果  $f(x)$  对该区间内任意两点  $x_1$  和  $x_2$  恒有:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|^2$$

则  $f(x)$  在开区间内是一个常函数.

(4) 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛,

且  $v_n > 0$ , 当  $n = 2, 3, 4, \dots$ . 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$  收敛.

## 2. 计算 (20分)

1) 求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} + \left( \frac{3-e^x}{2+x} \right)^{\csc x} \right]$$

2) 当  $x \rightarrow 0$  时, 求  $1 - \cos(\sin x) + \alpha \ln(1+x^2)$  是多少阶无穷小量. ( $\alpha$  为参数)3) 求不定积分:  $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ .4) 已知  $z(x, y) = (xy)^x$ .求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .5) 求三重积分:  $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$ .其中  $D = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq z \leq 3\}$ .

## 3. (26分)

1) 讨论级数收敛和发散.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-5) \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

2) 讨论反常积分 (或广义积分) 的收敛和发散.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln(1+x)}{1+x^\beta} dx \quad \text{其中 } \beta > 0.$$

3) 已知  $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ , 其中  $a > 0$ , $b > 0, c > 0$ .求在条件  $x+y+z=1$  下的极小值.

