复 旦 大 学

2000年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学 计算数学 应用数学 运筹学与控制论

考试科目：高等代数

（共 1 页）

(共五题，每题20分)

1. 求方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的逆阵。

2. 设 A 为一个 n 阶方阵且 A 的秩等于 A^2 的秩。证明 A 的秩等于 A^3 的秩。

3. 设 A 为一个 n 阶正交阵，$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_{n-1}$ 为一组线性无关的列向量，对于 $1 \le i \le n-1$ 都有 $A\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_i$. 如果 A 的行列式等于1，证明 A 是单位矩阵。

4. 设 n 是一个自然数，V 是由所有 $n \times n$ 实矩阵构成的 n^2 维实向量空间，U 和 W 分别为由所有 $n \times n$ 对称矩阵和反对称矩阵构成的空间。证明 $V = U \oplus W$, 即 V 是 U 和 W 的直和。

5. 设 K 为一个数域，$K[x]$ 为 K 上以 x 作为不定元的多项式全体所组成的集合。设

$$A = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ h(x) & q(x) \end{pmatrix},$$

其中 $f(x), g(x), h(x), q(x) \in K[x]$. 假定 $f(x)q(x) - g(x)h(x)$ 是 K 中的一个不等于零的数。证明 A 可以表示成有限多个以下类型的矩阵的乘积：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r(x) & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

其中 a, b 是 K 中的非零数，而 $r(x), s(x) \in K[x]$.