复 旦 大 学

2000年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：计算机系统结构、计算机软件与理论、计算机应用技术

考试科目：数学分析与线性代数

（共 3 页）

线性代数

1. 计算下面行列式的值（8分）

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} \qquad d_2=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

2. 证明题（6分）

(1) 如果 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，证明 $A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$

(2) 设 $A^2=A$，$B^2=B$，证明：如果 $(A+B)^2=A+B$，则 $AB=0$

3. 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$ 求 $\mathcal{A}$ 的特征值及其对应的特征向量（8分）

4. 对于任意 n 阶方阵 A, B（包括 $|A|=|B|=0$），求证 AB 与 BA 有相同的特征值和相同的特征多项式（8分）

数学分析

1. (20分)

(1) 严格表述下列概念，

1) 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数.

2) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty$

(2) 下列命题如果正确的，那么请给出严格证明；否则举出反例，且作必要说明.

1) 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是有界的.

2) 设当 $n\geq 1$ 时，有 $a_n\leq a\leq b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

3) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

4) 如果存在 $M>0$ 使 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 满足，

$$\sum_{k=2}^{n}|a_k-a_{k-1}|<M$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

2. 计算 (30分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \arccos\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\operatorname{tg}x}$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & x\geq 1 \\ e^{\frac{1}{x}} & 0<x<1 \end{cases}$，已知 f 在 $x=1$ 处可导，求 a,b 的值.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 其中g在$(-\infty,+\infty)$内有二阶连续导数，并且$g(0)=g'(0)=0$，讨论导函数f'在哪个区间内连续。

(4) 在下列数 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$中，求出最大一个数。

(5) 求不定积分 $\int\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$

(6) 求三重积分：

$$I=\iiint_D\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

其中D是锥面$\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$和平面$z=c$以及坐标平面$x=0$，$y=0$所围区域。

3. (20分)

(1) 说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^2}$ 的敛散性。

(2) 设函数$f(x)$定义为

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\cdots$$

求证$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续。

(3) 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$ $(p>0)$的收敛性。

(4) 讨论 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ $(p>0,\ q>0)$的收敛性