

## 复 旦 大 学

## 2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：管理科学与工程

考试科目：管理科学导论（运筹学）

(共 4 页)

## 1. (20 分) 对线性规划问题

$$\begin{aligned} \max & \quad 10x_1 + 12x_2 + 12x_3 \\ \text{s. t.} & \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ & \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

分别用  $x_4, x_5, x_6$  表示三个约束的松弛变量。

(1) 写出求解该问题的初始单纯形表；

(2) 如果下表是一张在求解过程中出现的单纯形表，请把它补完整：

$c_j$				10	12	12	0	0	0
$C_B$	基	b		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
12	$x_3$	10				1	1	-1/2	0
10	$x_1$	0				0	-1	1	0
0	$x_6$	10				0	1	-3/2	1
$c_j - z_j$						0	-2	-4	0

(3) 在上述单纯形表的基础上进行一次迭代，写出新的单纯形表；

(4) 写出该问题的最优解和最优值。

2. (15 分) 某炼钢公司为安排下一阶段的生产，要做一个炼焦煤订购计划。该公司下一阶段要订购炼焦煤 120 吨，对炼焦煤的品质要求是平均可燃率达到 16%。所谓可燃率是指炼焦煤中可燃物质所占的比例。经过该公司的某种装置处理，不同品质的炼焦煤可均匀搅拌

成同一品质的炼焦煤。该公司的供应商共有三家：A、B 和 C，它们炼焦煤的价格和品质如下表。供应商的炼焦煤可通过火车或卡车运输到该公司（运输要求见下表），但由于受装卸设备的限制，通过火车运达的炼焦煤不能超过 80 吨，通过卡车运达的炼焦煤不能超过 70 吨。现在该公司希望制定一个使炼焦煤总订价达到最低的订购计划。

	供应商 A	供应商 B	供应商 C
订购价格	500 元/吨	600 元/吨	640 元/吨
可燃率	15%	16%	20%
运输方式	只可用火车	可用火车和卡车	只可用卡车

对此问题，我们建立线性规划模型。设  $x_1$  为向供应商 A 订购的炼焦煤吨数， $x_2$  为向供应商 B 订购的用火车运输的炼焦煤吨数， $x_3$  为向供应商 B 订购的用卡车运输的炼焦煤吨数， $x_4$  为向供应商 C 订购的炼焦煤吨数。则

$$\begin{aligned} \min \quad & 500x_1 + 600x_2 + 600x_3 + 640x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120 \quad (\text{需求量要求}) \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \quad (\text{火车运输量要求}) \\ & x_3 + x_4 \leq 70 \quad (\text{卡车运输量要求}) \\ & x_1 - 4x_4 \leq 0 \quad (\text{品质要求}) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

这里关于品质要求的约束有

$$(15\%x_1 + 16\%x_2 + 16\%x_3 + 20\%x_4) / (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq 16\%$$

得到。现已知

$$x_1=80, x_2=0, x_3=20, x_4=20$$

是一个最优解，相应的最低订价为 64800 元。

- (1) 对该最优解进行灵敏度分析，得到使四个变量的检验数保持非负性的目标系数变化范围分别为  $(-\infty, 590]$ ,  $[510, +\infty)$ ,  $[528, 640]$ ,  $[600, 1000]$ 。现问如果供应商 B 每吨炼焦煤提高订价 40 元，上述订购计划是否要改变？
- (2) 对上述最优解进行敏感性分析时，得知四个约束的影子价格依次为 600, -90, 0, -10；它们的有效范围依次为右边值在区间  $[100, 150]$ ,  $[50, 96]$ ,  $[40, +\infty)$ ,  $[-80, 80]$  内。现问如果订购量提高到 130 吨，则最低总订价要提高多少？

(3) 如果卡车的最大运输量提高到 80 吨, 上述最优订购计划会否改变?

(4) 如果要使该公司订购的炼焦煤平均品质提高 0.2%, 则最低总订价要提高多少?

3. (15 分) 某公司有  $m$  种资源, 各种资源的数量分别为  $b_i, i=1, 2, \dots, m$ . 用这些资源可生产  $n$  种产品. 第  $j$  种产品生产一个单位分别需要第  $i$  种资源  $a_{ij}$  个单位,  $i=1, 2, \dots, m, j=1, 1, \dots, n$ . 生产每单位第  $j$  种产品可获利  $c_j$  元. 由于生产条件的限制, 公司决定选择  $n$  种产品中的  $k$  种投入生产, 并把决策的目标定为总获利最大. 公司希望知道应生产哪  $k$  种产品, 每种产品应生产多少个单位. 请对此问题建立混合整数线性规划模型.

4. (15 分) 某推销员要到  $C_1, C_2, C_3, C_4$  四个城市去推销产品, 他将从  $C_1$  出发, 经过  $C_2, C_3, C_4$  各一次, 最后返回  $C_1$ . 例如从  $C_1$  到  $C_3$ , 然后从  $C_3$  到  $C_2$ , 再从  $C_2$  到  $C_4$ , 最后从  $C_4$  回到  $C_1$ , 就是一条可考虑的推销路线, 我们把它记作路线  $(C_1, C_3, C_2, C_4, C_1)$ . 现在下表已列出所有  $C_i$  到  $C_j$  的交通费用  $c_{ij} (i, j=1, 2, 3, 4; i \neq j)$ .

$c_{ij}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$C_1$	—	8	5	6
$C_2$	6	—	8	5
$C_3$	7	9	—	5
$C_4$	9	7	9	—

一条路线的交通费用计为每两个城市之间的交通费用之和. 例如路线  $(C_1, C_3, C_2, C_4, C_1)$  的交通费用为  $c_{13}+c_{32}+c_{24}+c_{41}$ . 该推销员希望确定一条交通费用最低的推销路线. 请用动态规划方法求解该问题.

5. (15 分) 某工程队承接了一项工程, 必须 4 周完成. 工程队负责人将整个工程队分成 2 个能力完全相同的小组, 将整个工程分成 3 项任务: A, B, C; 并以周为时间单位去安排每个小组的任务. 每项任务可进行的时间和总共所需时间见下表. 每项任务不必从头至尾由一个小组做, 但每周至多只有一个小组去做. 每项任务也不必连

着进行，允许中间停顿。每个小组每周至多去做一项任务，也不必连续工作，允许有的时间不安排工作。

任务	可进行的时间	完成所需的时间
A	第 1, 2, 3 周	2 周
B	第 1, 2, 3, 4 周	3 周
C	第 2, 3, 4 周	3 周

请建立一个最大流模型，解决下列问题：

- (1) 这个工程队能否按期完成工程？
- (2) 如能按期完成工程，则 4 周中的每一周两个小组应去做哪些任务？

6. (10 分) 考虑两人混合策略矩阵对策，设局中人 I 的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 证明

$$x^* = (1/3, 0, 2/3) \text{ 和 } y^* = (1/3, 1/3, 1/3)$$

分别为局中人 I 和 II 的最优混合策略，对策值  $V_G = 7/3$ ；

(2) 如果局中人 I 的赢得矩阵改为

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则上述局中人 I 和 II 的最优混合策略是否改变？对策值  $V_G$  又是多少？

7. (10 分) 某诊所共有同样医疗水平的医生 2 名。现已知病人按 Poisson 流来到医务室求诊，平均每小时来到 15 人；又医生给每个病人诊病的时间服从负指数分布，平均每人为 6 分钟。现要问：

- (1) 诊所的空闲的概率；
- (2) 诊所里病人平均人数；
- (3) 病人求诊平均时间。