复旦大学

2001年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
计算数学
应用数学
运筹学与控制论

考试科目：高等代数

（共 2 页）

1. (10分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

求三阶可逆阵 P, 四阶可逆阵 Q 使

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

2. (10分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

求非零整数 x, y 使

$$(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

3. (20分)记 $M_n(\mathbb{R})$ 为由所有的 n 阶实方阵在通常的运算下形成的向量空间。记 S 为所有的 n 阶实对称方阵所构成的集合，T 为所有的 n 阶实反对称方阵所构成的集合。

(1) 求证 S,T 都是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间;

(2) 将 $M_n(\mathbb{R})$ 中两个元素 (a_{ij}) 和 (b_{ij}) 的内积定义为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij},$$

这样 $M_n(\mathbb{R})$ 就成为内积空间。求证在这个内积空间中 S 和 T 互为正交补。

4. (20分)设 K,F,E 都是数域，满足 $K\subseteq F\subseteq E$. 则在通常的运算下 F 和 E 是数域 K 上的向量空间，E 又是数域 F 上的向量空间。假定作为 K 上的向量空间 F 是有限维的，作为 F 上的向量空间 E 是有限维的，求证作为 K 上的向量空间 E 是有限维的。

5. (20分)问下列两个方阵是否相似，说明理由。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (10分)设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵。求证必存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 矩阵使 $AB=0$.

7. (10分)设 A 是一个 n 阶实方阵满足 $A'=-A$. 设 λ 是 A 的一个特征值。求证 λ 的实部等于零。