

复 旦 大 学

2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考专业：基础数学
 计算数学
 应用数学
 运筹学与控制论

考试科目：数学分析

(共 2 页)

1. 求极限：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - e^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)} \quad (12 \text{ 分})$$

2. 已知 $f(0) < 0, f''(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$ ，证明 $\frac{f(x)}{x}$ 分别在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 都是严格单调增加函数。 (12 分)

3. 设 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛， $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ ，问积分 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 是否一定收敛？收敛的话，请证明之；不一定收敛的话，请举出反例。 (12 分)

4. 设 $z = z(x, y)$ 是由隐函数 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 确定，求表达式

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \text{, 并要求简化之。} \quad (12 \text{ 分})$$

5. 用 Lagrange 乘数法, 解 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{z^4}{2}$ 在 $xyz = 1$ 条件下的极值问题。 (13 分)

6. 求曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ 所围区域的体积。 (13 分)

7. 证明: $\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6}$. (推导过程要说明理由) (13 分)

8. 将 $y = \sin x, x \in (0, \pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$ 的和。 (13 分)