复 旦 大 学

2003 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目： 数学分析与线性代数

注意:答案请做在答卷纸上,做试题上一律无效。

(共 3 页)

数学分析部分

(一) (45 分)

1. 严格表达下列概念：

(1) 定义在区间 $[a, b]$ 上的函数 $y = f(x)$ 在该区间是连续的。(6 分)

(2) 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在其定义区间 $[a, b]$ 上绝对一致收敛于和函数 $f(x)$。(7 分)

2. 判断下列命题是否正确：如果正确，请给出严格证明；否则请举出反例，并作必要说明。

(1) $[0,1]$ 上的有界函数，若是绝对可积则一定可积(8 分)

(2) 若 $f(x)=f'(x)$, 且 $f(0)=1$,则 $f(x)=e^x$。(8 分)

(3) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域中恒不为零且有二阶连续偏导函数,另外还满足：$f\cdot f_{xy}=f_x\cdot f_y$,那么 $f(x,y)$ 一定可以表示为： $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$。(8 分)

(4) $[0,1]$ 上的有界函数，若有无穷多个不连续点，则它在 $[0,1]$ 上一定是不可积的。(8 分)

（二）　（ 40 分 ）

1. 请计算函数 $f(x)=[n^{-1}\cdot((a_1)^x+(a_2)^x+\dots+(a_n)^x)]^{n/x}$ 在 $x\to\infty$ 时的极限。 （ 10 分 ）

2. 请计算不定积分： $\int(x^2-a^2)^{1/2}\,dx$。（ 10 分 ）

3. 请计算第二类曲线积分：$\int_c(2a-y)dx+dy$，其中 c 是旋轮线：$x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant \Pi$，方向由（ 0 ， 0 ）到 （ $2\Pi a$ ， 0 ）（ 10 分 ）

4. 请计算曲面 $z=axy$ 包含在圆柱面：$x^2+y^2=a^2$ 内的面积 S 。（ 10 分 ）

（三）　（20 分）

1. 讨论反常二重积分 $\iint_D[g(x,y)\cdot(1+x^2+y^2)^{-p}]dx$ 的敛散性，其中，$0<m\leqslant|g(x,y)|\leqslant M$，积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,-\infty\leqslant x\leqslant\infty\}$。（ 10 分 ）

2. 确定幂级数 $\{1+(x^4/4!)+(x^8/8!)+\dots+(x^{4n}/(4n)!)+\dots\}$ 的和函数 $f(x)$。（ 10 分 ）

100

线性代数部分

1．设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$A_{kj}$ 是a_{kj}的代数余子式，求证

(1) $\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix} = D+\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} A_{kj}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & \cdots & a_{3n}-a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}$

（13 分）

2．设 W_1,W_2 是 R^n 的两个子空间，证明：如果 $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1\cap W_2)+1$，则 $W_1=W_1+W_2$，$W_2=W_1\cap W_2$ 或 $W_2=W_1+W_2$，$W_1=W_1\cap W_2$ （10 分）

3．设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$，

（1） 确定a,b，（2）求一个可逆矩阵 C，使得$C^{-1}AC=B$（12 分）

4．设实对称矩阵 A 的特征值全大于 a，实对称矩阵 B 的特征值全大于 b，证明：A+B 的特征值全大于 a+b。（10 分）

101