复旦大学

2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析与线性代数

注意:答案请做在答卷纸上,做试题上一律无效。

（共 3 页）

线性代数部分

一、 简答题：（15 分）

1. 设方阵 A 满足 $A^2-2A-3E=0$，求 A^{-1}（E为单位矩阵）
2. 若向量（1，2，0）与（x，y，0）线性无关，则 x 与 y 的取值应为什么？
3. $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$，求 A^{10}
4. 已知 n 阶实对称矩阵 A 的特征值中有 m 个零，t 个正实数，问 A 的秩，正惯性指数，负惯性指数及符号差是多少？
5. 设 A 和 B 是 n 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，A^*为 A 的伴随矩阵；则 $|2A^*B^{-1}|$ 的值是多少？

二、 计算题（15 分）

1. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$ 这里 $x_i\neq a_i$，$i=1,2,3,\cdots,n$

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ t & -2 & 2\\ 3 & s & -1\end{pmatrix}$的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$,则 s,t 的值为多少？

三、证明题（15分）

（1）若 A，B 为同阶可逆矩阵，则（AB）*=B*A*

（2）若 A 为可逆矩阵，则 A*可逆且（A*）$^{-1}$=（A^{-1}）*

（3）若 AA^T=E，则$(A^*)^T=(A^*)^{-1}$

（注意：A*为 A 的伴随矩阵，A^{T}为 A 的转置矩阵，其它类推）

数学分析部分

一、严格表达下述概念(14%)

1. 二元函数全微分的数学定义
2. 第一类曲面积分的数学定义

二、判断下述结论是否正确，并说明理由(21%)

1. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$均发散且$a_n\le c_n\le b_n(n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$也发散.

2. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)连续且可偏导，但它在该点不可微.

3. 曲线积分与积分路径的方向无关.

三、计算题：(30%)

1. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$

2. 求函数 F(t)的导数，设$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，这里$f$是可微的函数.

3. 计算二重积分$\iint\limits_{D}\dfrac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,其中积分区域为

$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$.

134

36

四、证明题(40%):

1. 设 $f(x)$ 单调下降且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，证明若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\cos^2 x dx$ 收敛；

2. 设函数 $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)=-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \log_2 x_i$，并且 $x_i>0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1(i=1,2,\cdots,n)$。证明：$H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\le\log_2 n$。

3. 设函数 $u_n(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上 $(n=1,2,\cdots)$，且 $u_n(x)$ 在此区间上可导，导函数为 $u_n'(x)$ $(n=1,2,\cdots)$。设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 x=a 处收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

(1)在 $[a,b]$ 中任取一点 x_0，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n(x)-u_n(x_0))$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

(2)证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，并且有

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上常义可积，函数 $g(x)$ 以 $T(>0)$ 为周期，在 $[0,T]$ 上可积，且 $g(x)\ge 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx$

(说明：本题的证明可作为推广的黎曼(Riemann)引理证明中的部分内容)