

复旦大学

2004 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 量子力学

注意: 答案请做在答卷纸上, 做试题上一律无效。

(共 2 页)

- (1) 质量为 m 的粒子处在宽度为 a 的一维无限深势阱中, 设在时刻 $t=0$ 粒子的状态为 $\Phi(0) = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 + a_4\phi_4$, $\phi_i (i=1,2,3,4)$ 是能量为 E_i 的一维无限深势阱的归一化本征函数, a_1, a_2, a_3, a_4 是已知的常数, 求:

- a) 在时刻 $t=0$ 时, 测量能量, 结果小于 $3\pi^2\hbar^2/ma^2$ 的几率
- b) 在时刻 $t=0$ 时, 能量 E 和 E^2 的平均值
- c) 时刻为 t 时的波函数 $\Phi(t)$
- d) 如果在 Φ 态测量能量, 所得结果为 $8\pi^2\hbar^2/ma^2$, 问测量后粒子处在何种状态? (30 分)

- (2) 设氢原子处在 $R_{21}Y_{1-1}$ 态, 求

- a) 势能 $V = -e^2/r$ 的平均值
- b) \vec{L} 为轨道角动量, 求算符 $\vec{L} \cdot \vec{L}_x$ 的平均值 $\langle \vec{L} \cdot \vec{L}_x \rangle$

(已知 $R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$, $Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi}$, a_0 为波尔半径)

(30 分)

学大且夏

(3) 一质量为 m 的粒子在三维势场 $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda xy)$ 中运动, 式中

k 是常数, λ 为小量

- a) 用微扰论求基态能量至二级修正
- b) 用简并微扰论求相对于第一激发态的能级至一级修正值 (30分)

(4) 两个自旋为 $1/2$ 的粒子组成的体系由哈密顿量

$$H = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

描述, 其中 \vec{S}_1, \vec{S}_2 分别是两个粒子的自旋, S_{1z}, S_{2z} 是它们的 z 分量, A, B 为常数, 求该哈密顿量的所有能级 (35分)

(5) 考虑两个具有同样频率 ω_0 的振子, 哈密顿量为

$$H_1 = \hbar\omega_0 a_1^\dagger a_1, \quad H_2 = \hbar\omega_0 a_2^\dagger a_2$$

记 H_1, H_2 相应于本征值 $n_1\hbar\omega_0$ 和 $n_2\hbar\omega_0$ 的本征态为 $|n_1, n_2\rangle$, 零点能可略去。在两个振子具有相互作用后, 其哈密顿量为

$$H = \hbar\omega_0 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_0 a_2^\dagger a_2 + g a_1^\dagger a_2 + g a_2^\dagger a_1 = \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & g \\ g & \hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

g 为正实数。因为有相互作用, 故 $|n_1, n_2\rangle$ 不是 H 的本征态

a) 求 H 的本征值 (提示: 可考虑使矩阵 $\begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & g \\ g & \hbar\omega_0 \end{pmatrix}$ 对角化)

b) 设体系在 $t=0$ 时, 处在 $|n_1=1, n_2=0\rangle$ 态, 求 $t>0$ 时体系的态矢量

c) 求在 $t>0$ 时, 体系出现在 $|n_1=0, n_2=1\rangle$ 态的几率

(25分)