2004年哈尔滨工程大学数学分析考研试题

2004 年招收研究生入学考试试题

目名称： 数学分析 试题编号：470

意：本试题的答案必须写在规定的答题卡或答题本上，写在本卷上无效。

、 填空题（10×3=30 分）

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}dx = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\int x\arctan x dx = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

函数 $u = xy^2z$ 在点 P（1，-1，2）处方向导数的最大值为________

二、 选择题（12×3=36 分）

1．在下列各小题中选择　　A: 收敛　　B: 发散

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ （ B ）　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ （ A ）

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^8}$ （ B ）　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ （ A ）

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$ （ A ）　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ （ A ）

2．在下列各题中选择　A: 绝对收敛　B: 条件收敛　C: 发散

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^2})$ （ A ）

(2) $\sum^{\infty}$ ...... （ B ）

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n)$.

、 证明题（1-6 题，每题 8 分,7-10 题，每题 7 分）

1. 设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上两次连续可导，证明在函数 $y=f(x)$ 的两个极值点之间至少包含曲线 $y=f(x)$ 凸性相反的两部分，反之，若曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 是凸（或凹）的，则在 (a,b) 内函数 $y=f(x)$ 至多有一个极值点.

2. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，又若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $f(x)\geq 0$，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，是否仍可推

7．设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有连续的导函数 $f'(x)$，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \text{ 于 } -\pi\le x\le\pi .$$

证明：$\lim\limits_{k\to\infty} ka_k=0$.

8．设 $f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调非增，证明在

$(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

9．设 $f(x,t)$ 关于 x,t 连续，对 x 有连续一阶偏导数，证明：函数

$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$ 满足方程

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=0 & \\ u_t(x,0)=0 & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

10．设 $u(x,y,z,t)$ 在有界域 Ω 上满足方程

kaoyan.com 考研加油站