哈尔滨工业大学

二00六年硕士研究生考试参考答案

考试科目代码：【 431 】

考试科目：高等代数

适用专业：基础数学、应用数学、计算数学、运筹学与控制论

考生注意：答案务必写在答题纸上，答在试题上无效。请按考题顺序答题，并标明题号

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	150

注：在本试卷中，$r(A)$表示矩阵A的秩，E_n表示n阶单位矩阵，A'表示A的转置矩阵

（每题15分，共10道题，满分150分）

相关无关 线性方程组

1. 设向量 $\beta_1=4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_2=\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+4\alpha_4$ 证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关的充要条件是向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关。

证明：$\underbrace{\begin{pmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 由 $|A|\neq0$，则 $\beta_1\cdots\beta_4$线性无关

$\Leftarrow$ 由$|A|\neq0$，则 A^{-1}存在，$\alpha=A^{-1}\beta$

从而$\alpha_1\cdots\alpha_4$线性无关

正交 欧氏空间

2. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是欧氏空间$R^n$的一组标准正交基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是$R^n$中的任$K$个向量

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$为标准正交向量组的充要条件是：

$$\sum_{s=1}^{n}(\alpha_i,\varepsilon_s)(\alpha_j,\varepsilon_s)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

可由$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$表出

证明：$\Rightarrow$ 令 ~~$\alpha_1=\varepsilon_1,\alpha_2=\varepsilon_2,\cdots,\alpha_k=\varepsilon_k$~~ 则 $\sum_{N=1}^{n}(a_i,\varepsilon_N)(a_j,\varepsilon_N)=\sum_{N=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_N)(\varepsilon_j,\varepsilon_N)$

$=(\varepsilon_i,\varepsilon_i)(\varepsilon_j,\varepsilon_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

$\Leftarrow \sum_{N=1}^{n}(a_i,\varepsilon_N)(a_j,\varepsilon_N)=\cancel{((a_i,\varepsilon_1)\cdots(a_i,\varepsilon_n))\begin{pmatrix}(a_j,\varepsilon_1)\\(a_j,\varepsilon_1)\\\vdots\\(a_j,\varepsilon_n)\end{pmatrix}=A'A}$

$=\sum_{N=1}^{n}(a_i'\varepsilon_N\varepsilon_N'a_j)=a_i'a_j=(a_i,a_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

3. 设A是$n\times n$矩阵 $(n\geq 2)$，A^*是A的伴随矩阵. 证明:

矩阵 秩

$$r(A^*)=\begin{cases} n & 当\ r(A)=n. \\ 1. & 当\ r(A)=n-1. \\ 0 & 当\ r(A)\leq n-1. \end{cases}$$

证明: ① 当$r(A)=n$时. $A^*=|A|\cdot A^{-1}$. 则 $|A^*|=\left||A|\cdot A^{-1}\right|=|A|^n\cdot|A^{-1}|=|A|^{n-1}\neq 0$. $r(A^*)=n$

② 当$r(A)=n-1$时 $|A|=0$. 则 $A\cdot A^*=0$ 因 $r(A)+r(A^*)\leq n$ $r(A^*)\leq 1$

若$r(A^*)=0$. ~~则~~ 因此$A=0$. 与$r(A)=n-1$矛. 即 $r(A^*)=1$

③ 当$r(A)<n-1$ 则. A的$n-1$阶余子式全为0. 即 $A^*=0$. $r(A^*)=0$

不变因子. 入矩阵

4. 设A是$n\times n$矩阵，试证:

1) A的最小多项式是唯一的。

2) A的最小多项式是A的特征多项式的因式.

最小多项式

证明: 1) 设 $A(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的标准形为 $\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_i(\lambda) & \\ & & & \ddots \\ & & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix}$ 而 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$

$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$, ……, $d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$. 因而 $d_i(\lambda)$ 是由行列式因式唯一确定的.

从而标准形唯一. 即不变因子唯一. 下证 ~~A2=A~~ ~~f(A)=λ~~ $A(\lambda)$ 的最后一个不变因子即为A的最小多项式. 由$D_n(\lambda)$为最大公因式. 也为特征多项式.

2) $D_n(\lambda)=|\lambda I-A|$. 而 $d_n(\lambda)$ 为最小多项式.

从而 $d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$. 为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=D_n(\lambda)$ 的因式.

多项式

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1.$$

问是否存在 $u(x)$、$v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.\quad \partial(u(x))<\partial(g(x)),\quad \partial(v(x))<\partial(f(x)).$$

如果存在，这样的 $u(x)$、$v(x)$ 是唯一的吗？说明理由.

证明：唯一存在. 由 $u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$ 则 $(f(x),g(x))=1$

相似、线性变换

6. 设 A 是复数域上的方阵，如果 A 的特征值全为 ±1，试证：A' 相似于 A^{-1} 难.

证明：因为 A 为 $\mathbb{C}$ 上方阵. 则 A 可以化为 Jordan 标准形.

① $A\sim A'$

② $A\sim A^{-1}$

~~$\lambda E-A$ $(\lambda-1)^k(\lambda+1)^{n-k}$~~

记 A 的若 Jordan 为 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ $\quad J=P^{-1}AP$

$J^2=P^{-1}A^2P=P^{-1}EP=E$

从而 J_i 为一阶的. $A\sim$ 对角阵 J. $A'\sim A$.

同理 $A^{-1}\sim J$. 即 $A'\sim A^{-1}$

$+B^{-1})X=A^{-1}X+B^{-1}X=\frac{1}{\lambda_1}x+\lambda_2 x=(\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_2)X$. $\lambda_1>0, \lambda_2>0$. $\frac{1}{\lambda_1}+\lambda_2>0$.

$A^{-1}+B^{-1}$为正定矩阵.

(4). ~~$(AB)'(AB)=B'A'AB=B'B=I$~~.

7. 已知 A. B 是两个 n 阶正定矩阵，判断下列结论是否正确. 说明理由.

特征值

(1) AB的特征值都大于零. √ (2) $A=B$ 的充要条件是 $A^{-1}B$ 的特征值都是1 √

(3) $A^{-1}+B^{-1}$正定 √ (4) AB正定. 不一定. 当 $AB=BA$ 时. AB正定. $(AB)'=B'A'=BA=AB$

~~$A'=A$. $B'=B$~~ ~~$(AB)'=B'A'=BA$~~

证明: (1) 由A.B 都为正定阵. 则 ~~$|A|>0$. $|B|>0$. $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n>0$. $|B|=\lambda_1'\cdots\lambda_n'>0$~~

~~$|AB|=\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|\cdot|B|>0$. $|AB|=|A|\cdot|B|=\lambda_1\cdots\lambda_n\lambda_1'\cdots\lambda_n'>0$.~~

~~设 $AX=\lambda X$. $(X\neq 0)$ $\lambda>0$. $BX=\mu X$ $(\mu>0)$ $ABX=A\cdot\mu X=\mu\cdot(AX)=\mu\lambda X$. $\mu\lambda>0$.~~

~~(2) $\Rightarrow$ 由A正定 由$A'A=I$ 而$A=B$. 即 A~~

~~$(\lambda>0)$ $AX=\lambda X$ $BX=\lambda X$ $A^{-1}BX=A^{-1}\lambda X$. $A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$ $\Rightarrow$ $A^{-1}BX=X$. $\Rightarrow$ $A^{-1}B$的特征值为1~~

~~$\Leftarrow$ 若$A^{-1}B$特征值为1. 则 $A^{-1}BX=\lambda X$. $\lambda=1$ 即 $A^{-1}BX=X$ $BX=AX$. $(B-A)X=0$~~

~~即 $B-A=0$. $\Rightarrow B=A$~~

(3) A正定. ∃C可逆. 使 $A=C'C$. $A^{-1}=C^{-1}(C^{-1})'=A_1'A_1$ (令$A_1=(C^{-1})'$). $B^{-1}=B_1'B_1$. $(A^{-1}+B^{-1})=A_1'A_1+B_1'B_1$ $=(A_1'\ B_1')\begin{pmatrix}A_1\\B_1\end{pmatrix}$ $=D'\cdot D$.

8. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 为 σ 的不变子空间，$f(x)\in P[x]$

证明：$f(\sigma)(W)$，$\ker f(\sigma)$ 也是 σ 的不变子空间. 其中 $\ker f(\sigma)$ 表示 $f(\sigma)$ 的核空间。

证: 首先 $0\in f(\sigma)W$, $\ker f(\sigma)$. 非空.

① $\forall f(x). g(x)\in P[x]$ $k\in P$ ~~$f(\sigma), g(\sigma)\in$~~

$f(\sigma)=0$. $g(\sigma)=0$. $(f+g)(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma)=0$

$(kf)(\sigma)=kf(\sigma)=0$

② W为σ不变子空间 $x, y\in W$. ~~$\sigma(x+y)$~~

~~$f(\sigma(x+y))=f(\sigma(x)+\sigma(y))$~~ $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$ $\sigma(kx)=k\sigma(x)$

$(f+g)\sigma(x)=f\sigma(x)+g\sigma(x)$

$\beta_i \notin \ker\sigma_i \neq V$. 任取 $\beta_1 \notin \bigcup \ker\sigma_i$. $\beta_2 \notin \langle\beta_1\rangle \bigcup$ — . $\beta_3 \notin \langle\beta_1,\beta_2\rangle \bigcup$.

9. 设 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s$ 是 n 维线性空间 V 的 s 个非零线性变换. 证明：存在 V 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使得 $\sigma_i(\alpha_j) \neq 0$. $\forall i = 1, 2, \cdots, s$; $j = 1, 2, \cdots, n$.

证明: 改为 $\sigma_{i_1}(\beta_j) \neq \sigma_{i_2}(\beta_j)$

10. 设多项式 $f(x) = x^4 + 6x + 2 \in Q[x]$, α 是 $f(x)$ 在复数域内的一个根，记

$$Q(\alpha) = \left\{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in Q\right\}.$$ — 张效同我朋友画例

证明：(1) $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约. 与在整数上一样

(2) 对任意 $g(x) \in Q[x]$, 都有 $g(\alpha) \in Q(\alpha)$.

(3) 对任意 $g(x) \in Q[x]$, 如果 $f(x) \nmid g(x)$, 则存在 $h(x) \in Q[x]$, 使得 $g(\alpha)h(\alpha) = 1$

证明: (1) 令 $x = y+1$. 则 $f(x) = (y+1)^4 + 6(y+1) + 2 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 10y + 9$.

~~取 $p=2$. 则 $2 \nmid 1$. $2 \mid 6$. $2 \mid 10$. $2^2 \nmid$~~

(2) 带余除法 $g = qf + r$. $\partial r \leq 3$ 或 $\partial r = 0$

$f(\alpha) = 0$ x 用 α 代

(3).

$(f, g) = 1$ $uf + vg = 1$ 代 α. $v(\alpha)g(\alpha) = 1$