

东北师大 2000 年数学分析

一、

1、 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \dots + n]$ 。

2、 证明：若 $a_0 = a > 0, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}), n = 1, 2, \dots$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限。

3、 求 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ 。

4、 计算 $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy, D: x \in [0, \pi], y \in [0, \pi]$ 。

二、 $f(x)$ 在有界区间一致连续 \Leftrightarrow 当 $\{a_n\}$ 是 I 的任何柯西数列时， $\{f(a_n)\}$ 也是柯西数列。

三、 若 (a, b) 内， $f''(x) > 0$ ， (a, b) 内任两点 $x_1 \neq x_2, \forall \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 则有不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

四、 证明：若 $\varphi(x)$ 在区间 I 上存在二阶导数，且 $\forall x \in I, \varphi''(x) \geq 0$, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，且 $f([a, b])$ 包含于 I , 则 $\varphi(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi[f(x)] dx$ 。

五、 证明： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 收敛于 $s(x)$ 而 $u_n(x)$ 在

$[a, b]$ 上是非负连续函数。则 $s(x)$ 在 $[a, b]$ 取到最小值。

六、 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且单调增加，则

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{1}{2}(a+b) \int_a^b f(x) dx。$$