东北师大 2001 数分

一、

1、 求 $F = x^2yzi + xy^2zj + xyz^2k$,。

2、 证明：$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在（0，1）上非一致连续。

3、 设 $F(x,y) = \int_y^{x^2} \cos(x^2+y^2-t^2)dt$ 求 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$。

4、 设 f(x,y)在（0，1）的邻域内有连续偏导数，且 f(0,1)=1, $f'_y(0,1) \neq 0$,

证明：方程 $F(x,y) = f(x, \int_0^y \sin t dt) = 0$，在 0 的某邻域确定唯一一个有连续导数的隐函数 y=g(x),并求 g'(0)。

二、证明：f(x)在（a,b）内非负，存在三阶导数，且方程 f(x)=0 在(a,b)内有两个相异实根，则存在 c 在(a,b)中，使 f'''(c)=0.

三、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dxdydz$，

其中 Ω 由 $2(x^2+y^2) = z, z = 4$ 围成。

四、计算曲线积分 $\int_L (ye^x + 2x + 1)dx - (2y - e^x)dy$，其中 L 有（0，0）沿上半圆 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 到（1，1）的一断弧。

五、证明：g(x)在[0，1]连续，g(1)=0,设 $f_n(x) = x^n g(x)$ 则 $\{f_n(x)\}$ 在[0,1]一致连续。

六、f(x)在[a,b]有二阶连续导数，且 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$，设 M= $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$，则

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24}$。

七、1、向量场 $F = x^2yzi + xy^2zj + xyz^2k$，求 rotF。

2、设向量场 $\Omega \subset R^3$ 为区域，若二次微分形式 $\omega \in C^{(2)}(\Omega)$, 并且 ω 是恰当形式，证明：Ω 是闭形式。