沈阳航空航天大学

2011年硕士研究生入学试题

科目代码：812

科目名称：数值分析

注意：考生不得在此题签上做答案，否则无效！

一、填空题（本题15分，每空3分）

1. 设$l_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$为互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$的n次Lagrange插值基函数，则$\sum_{j=0}^{n}x_j^2 l_j(x)=$______。

2. 已知函数$f(x)=x^2+x+1$，则二阶差商$f[1,2,3]=$______，三阶差商$f[1,2,3,4]=$______。

3. 当$n=3$时，牛顿-柯特斯系数$C_0^{(3)}=\frac{1}{8},C_1^{(3)}=C_2^{(3)}=\frac{3}{8}$，则$C_3^{(3)}=$______。

4. 用迭代法解线性方程组$Ax=b$时，迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$，$k=0,1,2,\cdots$对任意初始点均收敛的充分必要条件是______。

二、选择题（本题15分，每小题3分）

1. 按四舍五入原则，准确数8.000033与2.7182818具有五位有效数字的近似值分别为（　）。

（A）8.0000和2.7182　（B）8.0000和2.7183

（C）8和2.7182　（D）8和2.7183

2. 给定$[a,b]$上的节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$及对应的函数值$y_i,i=0,1,2,\cdots n$，则下列条件中，分段线性插值函数$I(x)$可能不满足的条件为（　）。

（A）$I(x)$在各节点处可导　（B）$I(x)$在$[a,b]$上连续

（C）$I(x)$在各$[x_k,x_{k+1}]$上是线性函数　（D）$I(x_i)=y_i,i=0,1,\cdots n$

3. 设 U 是 n 阶上三角矩阵，b 是 n 维列向量，则求解 Ux=b 总共需要（　　）次四则（加减乘除）运算。

（A）n^2　　（B）n^3　　（C）$n^3/3$　　（D）$n^2/2$

4. 若线性方程组 Ax=b 的系数矩阵 A 对称正定，则下述说法正确的是（　　）。

（A）雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法均可能不收敛

（B）雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法一定收敛

（C）雅可比迭代法一定收敛，高斯-塞德尔迭代法可能不收敛

（D）雅可比迭代法可能不收敛，高斯-塞德尔迭代法一定收敛

5. 下列关于求解非线性方程牛顿法的叙述中，正确的是（　　）。

（A）牛顿法是全局收敛的　　（B）重根对牛顿法的收敛阶没有影响

（C）牛顿法是不动点迭代的一个特例　（D）以上说法均不正确

三、（本题 15 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=-1,1,2$ 处的函数值分别为 $-3,0,4$。

(1) 建立函数 $f(x)$ 的差商表；（8 分）

(2) 根据(1)的结果写出 $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式。（7 分）

四、（本题 15 分）

确定下列求积公式的求积节点和求积系数：

$$\int_0^2 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

使其具有最高的代数精度。（注：计算结果可保留根号）

五、（本题 15 分）

已知如下的一组实验数据：

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	2	5	0

试用曲线最小二乘法求二次拟合多项式。

六、(本题 20 分)

给定线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\2&3&0\\2&0&-6\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix}.$$

(1). 将系数矩阵 A 分解为 L 和 U 的乘积，其中 L 是单位下三角矩阵，U 是上三角矩阵；（10 分）

(2). 利用 L 和 U 求解线性方程组 $Ax=b$。(10 分)

七、(本题 20 分)

给定线性方程组

$$\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(1). 已知初始点 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，分别用雅可比（Jacobi）迭代法和高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）迭代法计算两步迭代值；（10 分）

(2). 讨论雅可比迭代法解此方程组的收敛性。(10 分)

八、(本题 15 分)

已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix},$$

试用幂法计算矩阵 A 的主特征值与主特征向量迭代两步的近似值，要求初始点为 $v_0=(1,1,1)^T$（计算结果保留 4 位小数）。

九、（本题 20 分）

1. （10 分）已知非线性方程 $x-\varphi(x)=0$，其中函数 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$ 满足 $|\varphi'(x)-4|<1$。试利用 $\varphi(x)$ 构造一个迭代函数 $\psi(x)$ 使得不动点迭代法 $x_{k+1}=\psi(x_k), k=0,1,2,\cdots$ 收敛到原非线性方程的根。

2. （10 分）假设 $A\in\Re^{n\times n}$ 是非奇异矩阵，考虑迭代格式：

$$A_{k+1}=A_k(2I_n-AA_k),\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中，I_n 表示 n 维单位矩阵。证明：当 A_0 满足 $\|I_n-AA_0\|<1$ 时，上述迭代过程平方收敛于 A^{-1}。