沈阳工业大学

2007年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：数学分析

一（8分）证明 $f(x)=\sin x+x$ 在 R 上一致连续。

二（10分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx$。

三（10分）把函数 $f(x)=\ln x$ 按 $x-1$ 的幂展开成幂级数，并说明展开式的收敛域。求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和。

四（12分）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上只有第一类间断点，且对任意 $x,y\in(a,b)$，有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$ 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续。

五（12分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，且对任意 $x\in(0,1)$ 都有 $f(x)\neq0$。证明对任意自然数 n，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

六（12分）设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续的导数，求证 $f(0)\le\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|dx+\int_0^a|f'(x)|dx$。

七（12分）设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列，且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，又 $x_n\in[a,b](n=1,2,\dots)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$。

八（12分）证明：函数 $f(x)=\sum\frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且有连续的导函数。

九（14分）设变换 $u=x-2y$，$v=x+ay$ 把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，试求常数 a。

十（14分）计算 $I=\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx\quad(p>0,b>a)$。

十一（12分）设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数，证明 $\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint\limits_D u\Delta u dxdy+\int_L u\frac{\partial u}{\partial n}ds$，其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是沿 L 外法线方向的方向导数。

十二（14 分）计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{\left[y-3x^{2}\right]}d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|3x^{2}\leq y\leq 3\right\}$。

十三（8 分）设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(n=1,2,\ldots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，试证 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

注：考试时间为 180 分钟，满分为 150 分。