沈阳工业大学

2007 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、（60 分，每小题 6 分）判断下列命题是否成立？并简述理由。

1. 多项式 $d(x)$ 是多项式 $f(x),g(x)$ 的最大公因式，则有唯一一对 $u(x),v(x)$ 满足：$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$.

2. 利用行列式定义计算 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数是 2。

3. 由两个以上方程组成的线性方程组 $AX=b$ 不存在有 $n>1$ 个解的情况。

4. 如果两个矩阵之积 $AB=0$，则矩阵 $A=0$ 或 $B=0$.

5. 如果 A 是正定矩阵，那么 A^{-1} 也是正定矩阵。

6. 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法

$$k\circ\alpha=0, k\in R,$$

构成 R 上的向量空间。

7. 把复数域看成复数域上的线性空间，则变换 $A\xi=\bar{\xi}$ 是线性变换。

8. 如果复数域上的一个矩阵可对角化，则其 Jordan 标准型也是对角的。

9. 若 $(x-1)|f(x^n)$，则 $(x^n-1)|f(x^n)$.

10. V 与其对偶空间 V^* 具有相同的维数。

二、（15 分）计算行列式（$\alpha\neq\beta$）：$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

三、（15 分）设 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是一个实数域上的矩阵，证明：如果

$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n,$ 那么 $|A|\neq 0$.

四、（10 分）设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵，证明：若 $AB=0$，那么秩(A)+秩$(B)\le n$.

五、（10 分）t 取什么值时，下列二次型是正定的：

$$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3.$$

六、（15 分）设 V 是复数域上的 n 维线性空间，σ,τ 是 V 上的线性变换，且 $\sigma\tau=\tau\sigma$，证明：

1 如果 λ_0 是 σ 的一个特征值，那么 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间。(7 分)

2 σ,τ 至少有一个公共的特征向量。(8 分)

七、（15 分）

1 设 $V_1,V_2,\cdots V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明：V 中至少有一个向量不属于 $V_1,V_2,\cdots V_s$ 中任何一个。(9 分)

2 设 V 是一个线性空间，$f_1,f_2,\cdots f_s$ 是 V^* 中的非零向量，试证：存在 $\alpha\in V$，使得 $f_i(\alpha)\neq 0,i=1,2,\cdots s.$ (6 分)

八、（10 分）试利用矩阵的方法证明 Cramer 法则。

注：考试时间为 180 分钟，满分为 150 分。

048