沈阳工业大学

2008年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：数学分析 **第1 页 共 2 页**

一、（10分）设 $a_1=4$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

二、（10分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限。证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

三、（14分）设 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上且在 $x=1$ 处可微，对任意 $x,y>0$ 有 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$。证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处可微，并求 $f'(x)$ 与 $f(x)$。

四、（10分）设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L>0$。证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。

五、（12分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数 $f'(x)$ 且 $f(a)=0$，

证明 $(b-a)\int_a^b[f'(x)]^2dx\geq M^2$，其中 $M=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$。

六、（10分）证明对任意正整数 n，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n xdx=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$。

七、（12分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减非负且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$。

八、（12分）证明函数 $F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

九、（12分）设 $u=xy$，$v=\frac{x}{y}$，试把方程 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 变换成以 u，v 为自变量的形式。

十、 （12 分）试证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 可微，而 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 却不连续。

十一、 （12 分）证明：若 L 为平面上封闭曲线，l 为任意方向向量，则 $\oint_L \cos(l,n)ds=0$，其中 n 为曲线 L 的外法线方向。

十二、 （12 分）计算积分 $\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right|d\sigma$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$。

十三、 （12 分）设函数 $f(x)$ 在 $(a,b+1)$ 内有连续导数 $(a<b)$，

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],\quad x\in(a,b)\quad 。$$

证明：1、函数列 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 $f'(x)$。（8 分）

2、对任何闭区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$。（4 分）