

沈阳工业大学

2009 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 1 页 共 2 页

一 (60 分, 每题 6 分) 判断下列是否正确并说明理由

1. 在有理数域 Q 与实数域 R 之间存在无穷多个互异的数域.
2. 两个多项式的最大公因式随系数域的扩大而改变.
3. 若一个行列式有两行相同, 则这个行列式为零.
4. 一个 $n(>1)$ 阶反对称矩阵的行列式为零.
5. 有解的线性方程组 $AX=b$ (未知量个数大于 1) 解的数量要么有一个要么有无穷多个, 不存在其它情况.
6. 设 A, B 是两个同阶矩阵, 则 $\text{秩}(A+B) \geq \text{秩}(A) + \text{秩}(B)$.
7. 二次型 $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 不正定.
8. 若线性变换 σ, τ 可交换即 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则 τ 的核是 σ 不变的.
9. 平面上的全体向量, 对于通常的加法和如下定义的数量乘法: $k \circ \alpha = 0$ 构成一个实数域上的向量空间.
10. 两矩阵特征根相同, 则此两矩阵相似.

二. (15 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个不同的数, 而 $F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = 1$$

三. (10 分) 计算 n 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

四. (10 分) 设 $AX=0$ 是含有 n 个方程 n 个未知量的线性方程组. 证明此方程组有非零解的充要条件是 $|A|=0$.

五. (15) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是两个向量组. 设 (1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示; (2) $m > n$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 必线性相关.

六. (15 分) 设 A, B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵. 证明: (1) $|E_n - AB| = |E_m - BA|$; (2) AB 与 BA 具有相同的非零特征根.

七(10 分) 设 V 是数域 F 上 n 维向量空间, V 上的全体线性变换也构成一个向量空间. 证明这个向量空间的维数是 n^2 .

八. (15 分) 用正交变换化下列二次型为标准型, 并写出所作的正交变换

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$