沈阳工业大学

2010 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：线性代数与常微分方程　　　　第 1 页 共 2 页

一、（20 分）设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，其中 $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{nn}=1$。将 $A=(a_{ij})$ 的第 i 行元素换成 $x_1,x_2,\cdots x_{n-1},1$，而其余元素不变，记这样所得矩阵为 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$。证明：$|A|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$。

二、（20 分）证明方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 b 属于 A 的列向量所张成的空间。

三、（15 分）化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$$

成标准型。

四、（20 分）证明六个函数

$$\varepsilon_1=e^{ax}\cos bx,\varepsilon_2=e^{ax}\sin bx,\varepsilon_3=xe^{ax}\cos bx,$$
$$\varepsilon_4=xe^{ax}\sin bx,\varepsilon_5=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\varepsilon_6=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间，求微分变换 D（即对各函数求一阶导数）在基 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,6)$ 下的矩阵。

五、（20 分）证明 n 阶线性常微分方程组

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)$$

有 n 个线性无关的解，方程组的任一解都可以表示成它们线性组合。其中 $x(t)\in R^n,A(t)\in R^{n\times n}$。

六、（20 分）设 n 阶常系数线性非齐次微分方程组

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+u(t)$$

沈阳工业大学

2010 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：线性代数与常微分方程　　　　　　　　　　　　　　

所对应的齐次方程组 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 的一个基本解组组成的矩阵为 $X(t)$，试用参数变易法求出非齐次方程组解的表达式。其中 $x(t)\in R^n, A\in R^{n\times n}$。

七、（20 分）证明：若线性常系数齐次微分方程组 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 的系数矩阵 A 的所有特征值均具有负实部，则原点是渐进稳定的。

八、（15 分）证明：若李雅谱诺夫方程

$$A^T P + PA = I$$

有对称正定解 P，则线性常系数齐次微分方程组 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 的零解是渐进稳定的，其中 I 是单位矩阵。