沈阳工业大学

2010 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、（60 分每小题 6 分）判断题（简洁说明理由）

$\beta=(1,2,1,1)$，$\alpha_1=(1,1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,-1,-1)$

$\alpha_3=(1,-1,1,-1)$，$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$.

2、设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 实对称矩阵 A 的顺序主子式大于或等于零，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的.

3、数域 P 上的多项式 $f(x)$ 不可约，则它在复数域内无重根.

4、 $\mathbf{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵，如果 $\mathbf{P}$ 是 $s\times s$ 可逆矩阵，则 $R(\mathbf{PA})=R(\mathbf{A})$.

5、$10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$ 是正定二次型.

6、设 V_1,V_2 是向量空间 V 的两个非凡子空间，则在 V 中存在无穷多向量既不在 V_1 中也不在 V_2 中.

7、线性变换 σ 与 τ 可变换，则 τ 的核是 σ 的不变子空间.

8、设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{pmatrix}$，则 $A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^k&0\\\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^k\end{pmatrix}$（$k$ 是正整数）.

9、二次型 $2x_1x_2+2x_3x_4$ 的标准形之一是 $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

10、如果 σ 是 n 维欧氏空间的一个正交变换，则 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间.

二、(10 分)求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间(作为 $\mathbf{R}^5$ 的子空间)的一个标准正交基.

三、(10 分)设 **A** 是 n 阶实矩阵,**B** 是 $n\times 1$ 实矩阵,证明: 线性方程组 $A'AX = A'B$ 总有解.

四、(10 分)计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

五、(15 分)设 **V** 是复数域上的 n 维向量空间,σ,τ 是 **V** 的线性变换,且 $\sigma\tau = \tau\sigma$.证明:

1)如果 λ_0 是 σ 的一个特征值,那么 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间;

2)σ,τ 至少有一个公共特征向量.

六、(10 分)设 **A,B** 两个 $n\times n$ 实对称矩阵,且 **B** 是正定矩阵,证明存在一个可逆矩阵 **T** 使 $\mathbf{T'AT}$ 与 $\mathbf{T'BT}$ 同时为对角形.

七、(10 分)如果 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 是线性空间 V 的 s 个两两不同的线性变换,那么在 V 中必存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\sigma_1(\boldsymbol{\alpha}),\sigma_2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma_s(\boldsymbol{\alpha})$ 两两不同.

八、(15 分)试证明:n 阶方阵 A 存在最小多项式并且最小多项式是唯一的.

九、(10 分)设 $L(V,P)$ 是 V 的对偶空间,证明:$L(V,P)$ 与 V 维数相同.