沈阳工业大学

2011年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、 判断对错，并简要说明理由。（共60分，每小题6分）

1. 在有理数域Q与实数域R之间存在数域F 满足 Q⊂F⊂R；但在实数域R与复数域C之间不再存在数域H 满足 R⊂H⊂C。
2. 若f(x)，g(x)∈Q[x]在Q[x]中的最大公因式是d(x)，则 d(x)也是它们在R[x]中的最大公因式。其中Q，R 分别表示有理数域和实数域。
3. 在全部n级排列中奇、偶排列的个数是不一定相等的。
4. 对于线性方程组， 不存在n（ >1）个解的情况。
5. 对于两个能相乘的非零矩阵，它们的积可能为零矩阵。
6. 二次型顺序主子式≥0，则此二次型半正定。
7. 次数等于n(≥1)的实系数多项式全体对于多项式的加法和数量乘法。
8. 特征多项式相同的两个矩阵必相似。
9. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩r，在其中任取m个向量构成的向量组的秩≥r + m − s.

10. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间V的一个基，如果V中一个向量$\gamma$与每个$\alpha_i$都正交，则$\gamma$必为零。

二、（8分）证明：如果$f(x)|f(x^n)$，则$f(x)$的根只能是0或单位根。

三、（10分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}(x_i\neq a_i,i=1,2,\cdots,n).$$

四、（9分）设$\mathbf{A,B}$为n阶矩阵，$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})<n$，证明：齐次线性方程组$\mathbf{AX}=0$与$\mathbf{BX}=0$必有非零公共解.

五、（10 分）已知矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的第一行元素为

$a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=-1, (\mathbf{A}^*)'=\begin{pmatrix}-7 & 5 & 4\\ -4 & 3 & 2\\ 9 & -7 & -5\end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\mathbf{A}$.

六、（8 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 都是 n 维非零实向量，$\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵. 证明：如果 $\boldsymbol{\alpha}_i'\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,t)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

七、(18 分, 每小题 6 分) 设 V 是数域 P 上所有 n 阶对称矩阵关于矩阵的加法与数乘运算构成的线性空间，令 $V_1=\{\mathbf{A}\in V \mid tr(\mathbf{A})=0\}, V_2=\{\lambda\mathbf{E}_n \mid \lambda\in P\}$,

（1）证明：V_1, V_2 都是 V 的子空间.

（2）分别求出 V_1, V_2 的一组基与维数.

（3）证明：$V=V_1\oplus V_2$.

八、（15 分）设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，

$\sigma^3=2\varepsilon$(其中 ε 是恒等变换)，$\tau=\sigma^2-2\sigma+2\varepsilon$，证明：$\sigma\tau$ 都是可逆的线性变换.

九、（12 分）设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，令

$V_1=\{\boldsymbol{\alpha} \mid \sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\in V\}, V_2=\{\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha}\in V\}$. 证明：$V=V_1\oplus V_2$.