辽宁大学2007年
攻读硕士学位研究生入学考试试题

招生专业：<u>应用数学</u>　　考试科目：<u>线性代数</u>

试题种类：<u>B　卷</u>　　考试时间；<u>1 月 21 日下午</u>

（请将答案写在答题纸上,写在试题纸上无效）

一．(15 分)计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-2 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

二．(20 分)

$$设 A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & -1 & a-1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}.$$

1．讨论线性方程组 AX=B 的可解性.

2．选取有解情形之一，求出其一般解.

三．(20 分) 设 B 为实可逆反对称矩阵，证明 B^2+B^{-1} 可逆，且 A=$(B^2-B^{-1})(B^2+B^{-1})^{-1}$ 是正交矩阵.

四．(20 分) 证明：对任意 $n\times n$ 正定矩阵 A 及任意 $n\times s$ 实矩阵 G 恒有秩（G）= 秩（$G'AG$）.

五．(20 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+\lambda x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3 的秩为 2$$

1．求参数 λ

2．用正交变换将此二次型化为标准形，并求所用的正交变换.

六．(20 分) 设 P 是一个数域，$P^{2\times 2}$ 是数域 P 上所有的 2×2 矩阵组成的集合对于矩阵通常的加法与数量乘法构成的数域 P 上一个线性空间，

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| x,y,z\in P\right\}, V_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in P\right\}$$

1．求子空间 V_1 与 V_2 的维数与一组基.

2．求子空间 V_1+V_2 与 $V_1\bigcap V_2$ 的维数与一组基.

七（20 分）. 设 P 是一个数域，P^3 是数域 P 上所有的 3 维向量组成的集合对于向量通常的加法与数量乘法构成的数域 P 上一个线性空间，在 P^3 中设变换

$$\sigma:\ \sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_2,x_1-x_3,x_2+x_3)$$

1．证明 σ 是 P^3 的线性变换.

2．求 σ 在基 $\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(1,0,-2),\alpha_3=(0,1,1)$ 下的矩阵.

3．σ 是否可逆？若可逆，求 σ^{-1}.

八（15 分）. 证明：如 A 为正定矩阵，那么 A^{-1} 也为正定矩阵.

134