

一. (30分)

1. (10分) 推理证明:

$$(P \vee Q) \rightarrow R, R \rightarrow (S \vee U), U \rightarrow V, \neg(S \vee V) \Rightarrow \neg P$$

2. (20分) 推理证明:

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))), (\forall x)(P(x) \rightarrow (S(x) \Rightarrow Q(x))),$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow S(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$$

二. (20分)

给定字母表 $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ 及下面六条规则:

$$A \rightarrow AG, B \rightarrow DFE, C \rightarrow E,$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow DE, D \rightarrow BG$$

令 R 为定义在 V 上的二元关系, 且 xRy 表明从 x 出发

利用一条规则推出一字符串, 使其头字符为 y .

试用 Warshall 算法求每个字母连续应用上述规则可能推出的头字符.

三. (30分)

设 $\langle G, * \rangle$ 是群, $H \subseteq G$ 且 $H \neq \emptyset$. 试证明 $\langle H, * \rangle$

是 $\langle G, * \rangle$ 的子群的充要条件是若 $a, b \in H$, 则有

$$a * b^{-1} \in H.$$

四. (20分)

设有 $2n$ 个电话局, 如果每个电话局至少可以与另外 n 个电话局通话, 证明在这 $2n$ 个电话局中的任何两个电话局之间都可以通话 (也可能要通过另外的电话局).