试题编号：305　　　　　　　　　　　　　　　　2001年1月14日上午

大 连 理 工 大 学

2001 年硕士生入学考试 数学分析 试题 (共 2 页)

一．(60 分)

从以下第 1 到 8 题中选答六题，每题 10 分.

1. 证明：$f(x)=x^2$ 在区间 $[0,M]$ 一致连续 (M 为任何正数)，但在 $[0,+\infty)$ 不一致连续.

2. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 于 $[a,b]$ Riemann 可积.

3. 证明：若 $\alpha>1$，则广义积分 $\int_1^{+\infty}\sin x^\alpha dx$ 收敛.

4. 证明：若 $f(x),g(x)$ 为区间 (a,b) 上的连续函数，且对任何 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ 有 $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$，则 $f(x)\equiv g(x)$ 于 (a,b).

5. 证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛.

6. 已知：

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求 $f''(0)$.

7. 已知：

$$u(x,t)=\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha,$$

其中 ψ 和 ϕ 分别是可以求导一次和两次的已知函数. 计算：

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}.$$

8. 计算半径为 R 的球的表面积.

二. (40 分)

从以下第 9 到 14 题中选答四题，每题 10 分.

9. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

10. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$, 则 $\lambda=0$.

11. 计算曲面积分

$$I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy,$$

其中 S 为旋转椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

12. 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(0)=0, f(1)=1$ 且 $0\le f(x)<1$ 当 $x\in(0,1)$. 证明： $S_n(x)=f^n(x)$ 对任意小于 1 的正数 δ 在区间 $(0,1-\delta]$ 一致收敛，但在区间 $(0,1)$ 不一致收敛.

13. 设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(0)=0, f(1)=1$ 且 $0\le f(x)<1$ 当 $x\in(0,1)$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx=0.$$

14. 证明：若 $u_n(x)\in C[a,b], n=1,2,\cdots$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(b)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 不可能一致收敛.